Einführung in die Theorie algebraischer Kurven
§5 Der Satz von Riemann-Roch II

Gerrit Bauch

13.11.2014

Vorbemerkungen

Dies ist der zweite Teil des Vortrags über den Satz von Riemann-Roch. Wir haben bereits den Satz von Riemann gesehen, der für eine irreduzible projektive Kurve C aussagt, dass für jeden Divisor D die Ungleichung

$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - g$$

gilt, wobei g das Geschlecht von C bezeichnet. Unser Ziel ist es nun die Formel so abzuändern, dass wir eine Gleichheit erhalten. Dies ist der Satz von Riemann-Roch.

Sofern nicht anders deklariert, bezeichne stets k einen algebraisch abgeschlossenen Körper, sowie C eine projektive irreduzible Kurve. Ferner setzen wir voraus, dass es zu C birational äquivalente Kurven C' und X gibt, wobei C' eine projektive irreduzible ebene Kurve mit ausschließlich gewöhnlichen vielfachen Punkten und X eine projektive irreduzible nicht-singuläre Kurve ist. Wir werden später sehen, dass wir zu C stets solche Kurven bekommen. Es bezeichne ferner $K = K(C)$ ihren Funktionenkörper[1].

1 Derivationen und Differentiale

Wir führen zunächst das Konzept der Derivation ein.

Definition Sei R ein Ring, der einen Körper k enthält und sei M ein R-Modul. Wir nennen eine k-lineare Abbildung $D\colon R \to M$ mit $D(xy) = xD(y) + yD(x) \quad, \forall x, y \in R$, eine *Derivation* von R nach M.

Lemma 1.1. *Sei $D\colon R \to M$ eine Derivation, dann gilt*

(i) $D\big|_k = 0$,

(ii) $D(F(x_1, ...x_n)) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_1, ..., x_n)D(x_i)$ *für* $F \in k[X_1, ..., X_n], x_i \in R$

Beweis. (i) Folgt sofort aus $D(\lambda) = D(1 \cdot \lambda) = 1 \cdot D(\lambda) + \lambda \cdot D(1) = D(\lambda) + D(\lambda), \lambda \in k$

(ii) Aufgrund der k-Linearität von D und der Linearität der formalen Ableitung genügt es, die Aussage für Monome zu zeigen. Dort sieht man die Aussage per Induktion über die Anzahl

[1] $K(C') \cong K(C) \cong K(X)$ nach [Ful] §6.6 Prop. 12

der Variablen wie folgt ein

$$\begin{aligned}
D(x_1^{e_1}\cdot ...\cdot x_n^{e_n}) &= x_1\cdot D(x_1^{e_1-1}\cdot ...\cdot x_n^{e_n}) + x_1^{e_1-1}\cdot ...\cdot x_n^{e_n}\cdot D(x_1)\\
&= x_1^2\cdot D(x_1^{e_1-2}\cdot ...\cdot x_n^{e_n}) + 2\cdot x_1^{e_1-1}\cdot ...\cdot x_n^{e_n}\cdot D(x_1)\\
&\overset{...}{=} x_1^{e_1}\cdot D(x_2^{e_2}\cdot ...\cdot x_n^{e_n}) + F_{X_1}(x_1,...,x_n)\cdot D(x_1)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}\cdot D(x_i)
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.2. *Sei R ein Integritätsbereich mit $K = Quot(R)$ und sei M ein K-Vektorraum. Dann lässt sich jede Derivation $D\colon R\to M$ eindeutig zu einer Derivation $\tilde{D}\colon K\to M$ fortsetzen.*

Beweis. Sei $z = \frac{x}{y}\in K, x,y\in R$ und $\tilde{D}\colon K\to M$ eine Fortsetzung von D. Dann gilt

$$D(x) = \tilde{D}(x) = \tilde{D}(yz) = y\tilde{D}(z) + z\tilde{D}(y) = y\tilde{D}(z) + zD(y)$$

Damit folgt $\tilde{D}(z) = \frac{1}{y}(D(x) - zD(y))$, womit die Eindeutigkeit geklärt ist. Man rechnet leicht nach, dass $\tilde{D}$ eine wohldefinierte[2] Derivation auf K ist. □

Wir führen ein universelles Objekt in der Kategorie der R-Moduln ein.

Definition Sei für jedes $x\in R$ ein Symbol $[x]$ gegeben. Betrachte den freien R-Modul F über der Menge $\{[x]\mid x\in R\}$. Es bezeichne N den Untermodul von F der von allen Elementen der Form $[x+y]-[x]-[y], [\lambda x]-\lambda[x]$ und $[xy]-x[y]-y[x]$ für $x,y\in R,\lambda\in k$ erzeugt wird. Wir setzen $\Omega_k(R) := F/N$ und schreiben dx für das Bild von $[x]$ in $\Omega_k(R)$. Dann ist mit $d\colon R\to\Omega_k(R), x\mapsto dx$ offenbar eine Derivation auf R gegeben. Wir nennen $\Omega_k(R)$ den *Modul der Differentiale von R über k.* Seine Elemente heißen *Differentiale.*

Lemma 1.3. $\Omega_k(R)$ *erfüllt die folgende universelle Eigenschaft*

(∗) *Für jeden R Modul M und jede Derivation $D\colon R\to M$ gibt es einen eindeutig bestimmten R-Modulhomomorphismus $\varphi\colon\Omega_k(R)\to M$, sodass $D=\varphi\circ d$.*

Beweis. Betrachte den R-Modulhomomorphismus $\varphi'\colon F\to M$, definiert durch $\varphi'(\sum_i x_i[y_i]) := \sum_i x_iD(y_i)$ für $x_i,y_i\in R$. Wegen $N\subseteq\ker\varphi'$ erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung $\varphi\colon\Omega_k(R)\to M$. Diese erfüllt $D=\varphi\circ d$ und aufgrund der Konstruktion ist die Eindeutigkeit klar.

□

Wir untersuchen den Fall, dass R als k-Algebra endlich erzeugt ist.

Korollar 1.4. *Sei $R = k[x_1,...,x_n]$. Dann ist $\Omega_k(R)$ ein von den endlichen vielen $dx_1,...,dx_n$ erzeugter R-Modul. Ist insbesondere $K = k(x_1,...,x_n)$, so ist $\Omega_k(K)$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Erzeugendensystem $dx_1,...,dx_n$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Lemma 1.1. Der zweite Teil ergibt sich nun mit der Beobachtung aus Lemma 1.2, denn für $z=\frac{x}{y}\in K,\ x,y\in k[x_1,...,x_n]$, gilt $dz = \frac{1}{y}dx - \frac{1}{y}zdy$.

□

Wir arbeiten von nun an mit unserer Generalvoraussetzung aus der Vorbemerkung.

[2] d.h. insbesondere $\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'}\implies\tilde{D}\left(\frac{x}{y}\right)=\tilde{D}\left(\frac{x'}{y'}\right)$

Satz 1.5. *Betrachte $K = K(C')$, wobei C' eine irreduzible projektive ebenen Kurve über k mit ausschließlich gewöhnlichen Singularitäten ist. Es gelten folgende Aussagen*

(i) $\dim_k(\Omega_k(K)) = 1$

(ii) Ist char$(k) = 0$, so ist dx für alle $x \in K \setminus k$ eine K-Basis von $\Omega_k(K)$

Beweis. (i) Wir können zunächst C' als affin betrachten, indem wir sie mit einer geeigneten Hyperebene schneiden.

Sei also $F \in k[X, Y]$ eine affine irreduzible ebene Kurve mit $K(F) = K$. Bezeichne den Koordinatenring mit $R := k[X, Y]/(F) = k[x, y]$, so ist $K = k(x, y)$. Da F irreduzibel ist muss eine der partiellen Ableitungen ungleich 0 sein[3], ohne Einschränkung sei diese F_Y. Somit ist $F_Y(x, y) \neq 0$, da F irreduzibel ist und daher aufgrund der Grade F_Y nicht teilen kann. Lemma 1.1 zeigt uns

$$0 = d(0) = d(F(x, y)) = F_X(x, y)dx + F_Y(x, y)dy$$

woraus $\dim_k(\Omega_k(K)) \leq 1$ folgt.

Wir müssen also noch $\Omega_k(K) \neq 0$ zeigen. Dafür geben wir eine Derivation $D\colon R \to K$ (K als R-Modul aufgefasst) an mit $D(x) \neq 0$. Eine solche ist gegeben durch $D(\overline{G}) := G_X(x, y) + \frac{F_X(x,y)}{F_Y(x,y)} G_Y(x, y)$ für ein $G \in k[X, Y]$ und $\overline{G}$ das Bild von G in R, denn hier ist $D(x) = 1$.

(ii) Sei $x \in K \setminus k$ und char$(k) = 0$. Dann ist $K/k(x)$ eine endliche separable Körpererweiterung, womit nach dem Satz vom primitiven Element ein $y \in K$ existiert mit $K = k(x, y)$.[4] Es gibt also ein irreduzibles Polynom $F \in k(x)[Y]$ mit $F(y) = 0$. Wir können durch geeignete Multiplikation mit einem Element aus $k(x)[Y]$ unser $F \in k[X, Y]$ irreduzibel wählen. Wegen $F(x, y) = 0$ ist $K \cong \mathrm{Quot}(k[X, Y]/(F))$. Somit erhalten wir wie in Teil (i) eine Derivation, die x nicht annulliert und wissen daher, dass dx ganz $\Omega_k(K)$ erzeugt.

□

Bemerkung (a) Teil (ii) gilt nicht in char$(k) = p > 0$, denn dort ist stets $dz^p = pz^{p-1}dz = 0$.

(b) Für char$(k) = 0$ folgt also, dass es für alle $f, t \in K, t \notin k$ ein eindeutiges Element $\nu \in K$ gibt mit $df = \nu dt$. Wir schreiben $\nu = \frac{df}{dt}$ und nennen ν die *Ableitung* von f bzgl. t.

Satz 1.6. *Sei char$(k) = 0$, $\mathcal{O}$ ein diskreter Bewertungsring von K und $t \in \mathcal{O}$ ein uniformisierender Parameter. Dann ist für $f \in \mathcal{O}$ auch $\frac{df}{dt} \in \mathcal{O}$.*

Beweis. Mit der Notation in Satz 1.5 können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_P(F)$ der diskrete Bewertungsring im einfachen Punkt $P = (0, 0)$ ist.
Wähle N so groß, dass $\mathrm{ord}_P(\frac{dx}{dt}), \mathrm{ord}_P(\frac{dy}{dt}) \geq -N$ ist. Sei nun $f \in R = k[x, y]$ beliebig und $f_X, f_Y \in R$ die Bilder der formalen Ableitungen eines Urbilds von f in $k[X, Y]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_P\left(\frac{df}{dt}\right) &= \mathrm{ord}_P\left(f_X(x, y)\frac{dx}{dt} + f_Y(x, y)\frac{dy}{dt}\right) \\ &\geq \min\left\{\mathrm{ord}_P\left(f_X(x, y)\frac{dx}{dt}\right), \mathrm{ord}_P\left(f_Y(x, y)\frac{dy}{dt}\right)\right\} \\ &\geq -N, \end{aligned}$$

[3] Für char$(k) = 0$ ist dies klar. Ist char$(k) = p > 0$ und wären $F_X = F_Y = 0$ so folgt $F \in k(Y)[X^p]$ sowie $F \in k(X)[Y^p]$ und damit $F \in k[X^p, Y^p]$. Wähle eine $p$te Einheitswurzel für jeden Koeffizienten (k ist algebraisch abgeschlossen). Nun lässt sich das Polynom als p-Potenz eines Polynoms aus $k[X, Y]$ schreiben, also konnte F nicht irreduzibel sein.

[4] vgl. [Ful] §6.5 Prop. 9 sowie 10 (5)

da $f_X, f_Y \in R \subseteq \mathcal{O}$ und somit ihre Bewertung ≥ 0 ist.
Ist $f \in \mathcal{O}$, so kann man $f = \frac{g}{h}$ schreiben mit $h, g \in R, h(P) \neq 0$. Dann ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{h^2}\left(h\frac{dg}{dt} - g\frac{dh}{dt}\right)$$

und damit $\mathrm{ord}_P\left(\frac{df}{dt}\right) \geq -N$, da $\mathrm{ord}_P\,(h) = 0$.

Ferner ist $f - f(P) \in (t)$, also $f = \lambda + th$ wobei $h \in \mathcal{O}, \lambda = f(P)$. Man erhält durch iteratives Ersetzen von h durch $\lambda' + th'$ eine Darstellung $f = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i t^i + t^N g$ mit $\lambda_i \in k$ und einem $g \in \mathcal{O}$. Es folgt

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i i t^{i-1} + gNt^{N-1} + t^N \frac{dg}{dt}$$

Alle vorkommenden Summanden liegen in $\mathcal{O}$, also auch $\frac{df}{dt}$.

□

2 Kanonische Divisoren

Sei ab nun stets $\mathrm{char}(k) = 0$. Es bezeichne $\Omega = \Omega_k(K)$. Wir führen zunächst eine Bewertung auf den Differentialen $\omega \in \Omega$ ein.

Definition Sei $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ und $P \in X$ ein Punkt. Da X nicht-singulär ist, ist der lokale Ring $\mathcal{O}_P(X)$ ein diskreter Bewertungsring. Sei $t \in \mathcal{O}_P(X)$ ein uniformisierender Parameter, d.h. insbesondere $t \notin k$. Nach Satz 1.5 gibt es genau ein $f \in K^\times$ mit der Eigenschaft $\omega = fdt$. In diesem Falle definieren wir $\mathrm{ord}_P(\omega) := \mathrm{ord}_P(f)$.

Bemerkung Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des uniformisierenden Parameters.

Beweis. Sei $u \in \mathcal{O}_P(X)$ ein weiteres Uniformisierendes und $g \in K^\times$ mit $fdt = gdu$. Dann folgt mit Satz 1.6 $\frac{f}{g} = \frac{du}{dt}$, $\frac{g}{f} = \frac{dt}{du} \in \mathcal{O}_P(X)$ und $0 \leq \mathrm{ord}_P(\frac{f}{g}) = -\mathrm{ord}_P(\frac{g}{f}) \leq 0$, dass $\mathrm{ord}_P(f) = \mathrm{ord}_P(g)$ gilt.

□

Definition Sei $0 \neq \omega \in \Omega$. Wir setzen $\mathrm{div}(\omega) := \sum_{P \in X} \mathrm{ord}_P(\omega)P$ und nennen $\mathrm{div}(\omega)$ einen *kanonischen Divisor.*

Selbstverständlich ist noch nachzuprüfen, dass dies tatsächlich ein Divisor ist, dass also für fast alle $P \in X$ die Bewertung $\mathrm{ord}_P(\omega) = 0$ ist. Dafür werden wir zunächst zeigen, dass, wenn für ein $0 \neq \omega \in \Omega$ $\mathrm{div}(\omega)$ ein Divisor ist, die kanonischen Divisoren genau die zu $\mathrm{div}(\omega)$ linear äquivalenten Divisoren sind, womit wir nur von einem kanonischen Divisor die gewünschte Eigenschaft überprüfen müssen.

Lemma 2.1. *Sei für $0 \neq \omega \in \Omega$ der kanonische Divisor $W := div(\omega)$ gegeben und als ein Divisor identifiziert. Dann sind die kanonischen Divisoren genau die zu W linear äquivalenten Divisoren.*

Beweis. Zuerst zeigen wir für $0 \neq \omega \in \Omega, f \in K^\times$, dass $\mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$ gilt. Es ist hinreichend, dies für die Ordnung in jedem Punkt zu überprüfen. Sei dazu $P \in X$ beliebig und $t \in \mathcal{O}_P$ ein uniformisierender Parameter. Dann gibt es eindeutig bestimmte $g, h \in K^\times$ mit $f\omega = gdt, \omega = hdt$. Aufgrund der Eindeutigkeit gilt $h = \frac{g}{f}$. Es folgt $\mathrm{ord}_P(f\omega) = \mathrm{ord}_P(g) = \mathrm{ord}_P(fh) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(h) = \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(\omega)$.

Sei nun $0 \neq \omega' \in \Omega$ ein Differential. Dann existiert genau ein $f \in K^\times$ mit $\omega' = f\omega$. Somit folgt $\mathrm{div}(\omega') = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega)$, also $\mathrm{div}(\omega') \equiv \mathrm{div}(\omega)$.
Sei umgekehrt $W' \equiv W$ gegeben. Dann folgt $W' = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega) = \mathrm{div}(f\omega)$ mit einem $f \in K^\times$, d.h. $0 \neq f\omega \in \Omega$ ist ein Differential. □

Satz 2.2. *Sei die projektive irreduzible ebene Kurve C' mit ausschließlich gewöhnlichen vielfachen Punkten vom Grad $n \geq 3$. Es bezeichne $\mathfrak{f}\colon X \to C'$ den birationalen Morphismus zwischen der nicht-singulären Kurve X und C'. Es sei ferner $E := \sum_{Q \in X}(r_Q - 1)Q$, wobei $r_Q := m_{\mathfrak{f}(Q)}(C')$ gerade die Vielfachheit von $\mathfrak{f}(Q)$ auf C' bezeichne. Sei ferner G eine beliebige ebene Kurve vom Grad $n-3$. Dann ist div$(G) - E$ ein kanonischer Divisor.*[5]

Beweis. Mithilfe der vorherigen Vorträge können wir ohne Einschränkung folgende Annahmen treffen:
Wir finden Koordinaten $X, Y, Z \in \mathbb{P}^2$, sodass $\mathrm{div}(Z) = Z \bullet C = \sum_{i=1}^n P_i$ mit paarweise verschiedenen Punkten P_i, $[1:0:0] \notin C$ und keine Tangente an einem vielfachen Punkt von C durch $[1:0:0]$ geht.

Sei nun $x = X/Z$, $y = Y/Z \in K$ und sei F ein homogenes Polynom, welches C' definiert. Es bezeichnen ferner $f_x = F_X(x, y, 1)$, sowie $f_y = F_Y(x, y, 1) \overset{\S 5.1}{=} F_Y/Z^{n-1}$ die Dehomogenisierungen der formalen Ableitungen von F. Ebenso sei $E_m := (m \sum_{i=1}^n P_i) - E$ für $m \in \mathbb{N}$.

Es ist leicht zu sehen, dass Divisoren der Form $\mathrm{div}(G) - E$ mit $\deg(G) = n-3$ linear äquivalent sind. Wegen

$$\begin{aligned} E_{n-3} + \mathrm{div}(f_y) &= (n-3)\mathrm{div}(Z) - E + \mathrm{div}(F_Y) - (n-1)\mathrm{div}(Z) \\ &= -2\mathrm{div}(Z) + \mathrm{div}(F_Y) - E \\ &= \mathrm{div}\left(\frac{F_y}{Z^2}\right) - E \end{aligned}$$

ist also $E_{n-3} + \mathrm{div}(f_y) \equiv \mathrm{div}(G) - E$ und es genügt daher $\mathrm{div}(dx) = E_{n-3} + \mathrm{div}(f_y) - E$ zu zeigen. Nach obiger Rechnung müssen wir also noch zeigen, dass folgende Gleichheit gilt

$$\mathrm{div}(dx) - \mathrm{div}(F_Y) = -2\sum_{i=1}^n P_i - E \tag{1}$$

Es ist hinreichend, die Gleichheit der entsprechenden Ordnungen in jedem Punkt $Q \in X$ zu zeigen. Darüber hinaus sehen wir wie im Beweis von Satz 1.5 ein, dass $0 = F_X dx + F_Y dy$ gilt, d.h. $\mathrm{ord}_Q(dx) - \mathrm{ord}_Q(F_Y) = \mathrm{ord}_Q(dy) - \mathrm{ord}_Q(F_X)$. Wir machen eine Fallunterscheidung für $Q \in X$:

(i) Ist $\mathfrak{f}(Q) \in Z$, d.h. $\mathfrak{f}(Q) = P_i \in Z \cap C$ für ein $i = 1, ..., n$, dann ist $y^{-1} = \frac{Z}{Y}$ ein Uniformisierendes in $\mathcal{O}_{P_i}$[6]. Es folgt

$$0 = d(1) = d(yy^{-1}) = yd(y^{-1}) + y^{-1}dy \implies dy = -y^2 d(y^{-1})$$

und damit $\mathrm{ord}_Q(dy) = -2$. Da ferner $\mathrm{ord}_Q(F_X) = 0$ [7] gilt, sowie $\mathfrak{f}(Q)$ als einfacher Punkt von C' nicht in E vorkommt, gilt (1).

Bleibt noch der Fall $\mathfrak{f}(Q) = [a:b:1] \notin Z$. Wir können wegen $d(x-a) = dx$ und der Invarianz von Derivationen unter Translationen $\mathfrak{f}(Q) = [0:0:1]$ annehmen.

[5] Für die Definition von div(G) vergleiche §7.5 Notation, sowie §5.1
[6] [Ful] §3.2 Theorem 1
[7] [Ful] Problem 5.16

(ii) Sei nun Y eine Tangente von C' in $P = \mathfrak{f}(Q)$. Dann ist nach Annahme P kein vielfacher Punkt von C'. Also ist Y die Tangente in P und daher x ein Uniformisierendes, sowie $F_Y(P) \neq 0$. Es folgt $\mathrm{ord}_Q(dx) = \mathrm{ord}_Q(F_Y) = 0$. Da Q weder in div(Z) noch E auftaucht, gilt (1).

(iii) Ist schließlich Y keine Tangente von C' in $P = \mathfrak{f}(Q)$, so ist y ein uniformisierender Parameter in Q, also $\mathrm{ord}_Q(dy) = 0$ und $\mathrm{ord}_Q(F_X) = r_Q - 1$[8]. Da $P \notin Z$ ist, gilt also auch in diesem Fall (1).

□

Korollar 2.3. *Sei W ein kanonischer Divisor und g das Geschlecht von C. Dann gilt*

(i) $\deg(W) = 2g - 2$

(ii) $l(W) \geq g$

Beweis. Für $\deg(C') \geq 3$ folgt dies aus Satz 2.2 und [Ful] §8.3 Korollar 3b) für die Wahl $W = E_{n-3}$.

Wir betrachten nun den Fall $\deg(C') < 3$. Wegen der Formel aus [Ful] §8.3, Prop.5 und $g \geq 0$ folgt $g = 0$, sowie mit [Ful] §8.3, Korollar 2 und [Ful] §8.2, Korollar, dass C' birational äquivalent zu $\mathbb{P}^1$ ist. Es genügt also, die Aussagen für $\mathbb{P}^1$ mit dem Funktionenkörper $K = k(t)$ mit $t = \frac{X}{Y}$ und $g = 0$ zu zeigen. Wie im Beweis von Satz 2.2 wissen wir $dt = -t^2 d(t^{-1})$, womit $\mathrm{ord}_{[1:0]}(dt) = -2$ gilt, da dort t^{-1} ein uniformisierender Parameter ist. Für die anderen Punkte reicht es, wie im Beweis von Satz 2.2, aus, den Punkt $[0 : 1]$ zu betrachten. Dort ist t Uniformisierendes, also $\mathrm{ord}_{[0:1]}(dt) = 0$, weshalb insgesamt $\deg(dt) = -2$ gilt. Ferner ist $l(W) \geq 0 = g$.

□

3 Der Satz von Riemann-Roch

Bevor wir den Satz von Rieman-Roch beweisen können, benötigen wir noch einige kurze Lemmata, sowie das Noethersche Reduktionslemma.

Lemma 3.1. *Für zwei Divisoren D, D' mit $D \leq D'$ gilt $l(D') \leq l(D) + deg(D' - D)$.*

Beweis. Folgt direkt aus $\dim_k(L(D')/L(D)) \leq \deg(D' - D)$

□

Lemma 3.2. *Für einen Divisor D gilt genau dann $l(D) > 0$, wenn D linear äquivalent zu einem effektiven Divisor ist.*

Beweis. Für ein $f \in K^\times$ gilt $f \in L(D)$ genau dann, wenn $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$

□

Lemma 3.3. *Sei D ein Divisor und $l(D) > 0$. Dann gilt für fast alle $P \in C$ die Aussage $l(D - P) = l(D) - 1$.*

Beweis. Sei $f \in L(D) \setminus \{0\}$, d.h. $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$. Da $\mathrm{div}(f) + D$ ein Divisor ist, ist für fast alle Punkte $P \in C$ der Koeffizient für P gleich 0, d.h. $\mathrm{div}(f) + D - P \ngeq 0$ für fast alle P, also $f \notin L(D - P)$. Damit ist. $l(D - P) + 1 \leq l(D)$ für fast alle P. Andererseits gilt ebenso $l(D) \leq l(D - P) + 1$ nach Lemma 3.1.

□

[8] [Ful] §7.2, sowie Problem 7.4

Satz 3.4 (Noethersches Reduktionslemma)**.** *Sei D ein Divisor, W ein kanonischer Divisor und P ein Punkt, sodass $l(D) > 0$ und $l(W - D - P) \neq l(W - D)$ gilt. Dann ist $l(D + P) = l(D)$.*

Beweis. Verwende die Bezeichnungen aus Satz 2.2, d.h. P sei ein einfacher Punkt auf C' und $Z \bullet C' = \sum_{i=1}^{n} P_i$, wobei die P_i paarweise verschiedene Punkte sind und $P \notin Z$ ist. Setze wieder $E_m := (m \sum P_i) - E$. Wir wählen aufgrund von Lemma 2.1, sowie Satz 2.2 als kanonischen Divisor $W = E_{n-3}$ und nehmen ohne Einschränkung $D \geq 0$ nach Lemma 3.2 an. Dann ist insbesondere $L(W - D) \subseteq L(W)$.

Sei nun $h \in L(W - D) \setminus L(W - D - P) \subseteq L(W)$ und schreibe $h = \frac{G}{Z^{n-3}}$ mit einer ebenen Kurve G vom Grad $n - 3$ mit $\operatorname{div}(G) \geq E$.[9]. Für den Divisor

$$A := \operatorname{div}(G) - D - E = \operatorname{div}(h) + (n - 3)\operatorname{div}(Z) - D - E = \operatorname{div}(h) + W - D$$

gilt, dass $A \geq 0$, sowie $A \ngeq P$ nach Wahl von h.

Wähle nun eine Gerade L, sodass $L \bullet C' = P + B, B := \sum_{i=1}^{n-1} Q_i$, wobei die $Q_i \in C'$ alles einfache Punkte (jeweils verschieden von P) sein. Dann ist

$$\operatorname{div}(LG) = \operatorname{div}(L) + \operatorname{div}(G) = (D + P) + E + (A + B)$$

Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir noch $L(D + P) \subseteq L(D)$ einsehen. Sei dazu $f \in L(D + P)$ und $D' := \operatorname{div}(f) + D$. Es reicht $D' \geq 0$ zu zeigen.

Wegen $D + P \equiv D' + P$ können wir das *Residuentheorem*[10] anwenden. Es gibt also eine Kurve H vom Grad $n - 2$ mit $\operatorname{div}(H) = (D' + P) + E + (A + B)$. Es gilt $\operatorname{div}(H) \geq B$, da $D' + P, E, A$ effektiv sind. Dies bedeutet, dass sich H und L in wenigstens $n - 1$ verschiedenen Punkten schneiden. Da allerdings $\deg(H) \cdot \deg(L) = n - 2 \lneq n - 1$ gilt, muss L nach dem Satz von Bézout aber bereits eine Komponente von H sein. Daher ist insbesondere $H(P) = 0$ und damit $\operatorname{div}(H) \geq P$. Da aber sowohl $A, B \ngeq P$, als auch $E \ngeq P$ (da P einfacher Punkt ist) gilt, muss $D' + P \geq P$ gelten. Es folgt $D' \geq 0$.

□

Satz 3.5 (Der Satz von Riemann-Roch)**.** *Sei W ein kanonischer Divisor. Dann gilt für jeden Divisor D*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(W - D)$$

Beweis. Wir zeigen den Satz von Riemann-Roch zunächst für $\deg C' \geq 3$. Wir unterscheiden dazu mehrere Fälle

(i) Für $l(W - D) = 0$ führen wir eine Induktion über $l(D)$ durch.

- Ist $l(D) = 0$, so folgt nach dem Satz von Riemann

$$\begin{aligned} 0 = l(D) &\geq \deg(D) + 1 - g \\ &= \deg(D) + 1 - g + l(W - D) \\ &\geq \deg(D) + 1 - g + \deg(W - D) + 1 - g \\ &= \deg(W) + 2 - 2g \\ &= 0 \end{aligned}$$

[9] [Ful] §8.3 Korollar 3
[10] [Ful] §8

- Ist $l(D) = 1$, können wir nach Lemma 3.2 $D \geq 0$ annehmen, es gilt also $W - D \leq W$. Es folgt mit dem Satz von Riemann

$$\begin{aligned} \deg(D) &\leq -1 + g + l(D) - l(W - D) \\ &= g \\ &\leq l(W) \\ &\leq l(W - D) + \deg(D) \\ &= \deg(D) \end{aligned}$$

- Für $l(D) > 1$ gibt es nach Lemma 3.3 ein $P \in C$ mit $l(D - P) = l(D) - 1 > 0$. Aufgrund des Noetherschen Reduktionslemmas angewandt auf $D' = D - P$ haben wir also notwendig $l(W - (D - P)) = l(W - D) = 0$. Es folgt

$$l(D) - 1 = l(D - P) \overset{\text{IV}}{=} \deg(D - P) + 1 - g + l(W - D) = \deg(D) - g$$

(ii) Sei nun $l(W - D) > 0, l(D) = 0$. Dann gilt $0 = l(D) = l(W - (W - D))$ und somit nach Fall (i) $l(W - D) = \deg(W - D) + 1 - g + l(D)$. Es folgt

$$l(D) = -\deg(W - D) - 1 + g + l(W - D) = \deg(D) + 1 - g + l(W - D)$$

(iii) Sei schließlich $l(W - D) > 0, l(D) > 0$. Dieser Fall kann nur auftreten, wenn $\deg(D) \leq \deg(W)$ gilt, denn sonst wäre $l(W - D) = 0$, da dann $\deg(D - W) < 0$ ist.
Das heißt, dass der Satz von Riemann-Roch nur noch für Divisoren D mit nach oben beschränktem Grad falsch sein könnte. Sei also der Satz für $D + P$ wahr für alle P; wir müssen zeigen, dass dann auch D den Satz von Riemann-Roch erfüllt. Wegen $l(W-D) > 0$ können wir nach Lemma 3.3 P so wählen, dass $l(W - D - P) = l(W - D) - 1$ gilt. Wegen $l(D) > 0$ folgt mit dem Noetherschen Reduktionslemma

$$\begin{aligned} l(D) &= l(D + P) \\ &= \deg(D + P) + 1 - g + l(W - D - P) \\ &= \deg(D) + 1 - g + l(W - D) \end{aligned}$$

□

Bemerkung *Der Satz von Riemann-Roch gilt auch für* $\deg C' < 3$. *Wir zeigen dies, ohne das Noethersche Reduktionslemma zu verwenden, da wir jenes nur für* $\deg C' \geq 3$ *bewiesen haben.*

Beweis. Im Beweis von Korollar 2.3 haben wir bereits gesehen, dass in diesem Fall $g = 0$ gilt und damit $\deg(W) = -2$ und $l(W) = 0$ ist. Wir führen den Beweis ebenfalls mithilfe einer Fallunterscheidung

(i) $l(D) = 0$ Nach dem Satz von Riemann gilt $0 = l(D) \geq \deg(D) + 1$, also ist $-1 \geq \deg(D)$

- Ist $l(W-D) = 0$, so gilt nach dem Satz von Riemann auch die umgekehrte Abschätzung

$$0 = l(W - D) \geq \deg(W) - \deg(D) + 1 = -\deg(D) - 1$$

womit $\deg(D) = -1$ ist. Es folgt

$$0 = l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(W - D)$$

- Sei nun $l(W-D)>0$, also ohne Einschränkung $W-D\geq 0$ nach Lemma 3.2. Zum einen ist nach Lemma 3.1

  $$l(W-D)\leq l(0)+\deg(W)-\deg(D)=-1-\deg(D)$$

  Andererseits gilt nach dem Satz von Riemann

  $$l(W-D)\geq \deg(W)-\deg(D)+1=-\deg(D)-1$$

  Es folgt

  $$l(D)=0=\deg(D)+1+l(W-D)-g$$

(ii) Für $l(D)>0$ können wir nach Lemma 3.2 ohne Einschränkung $D\geq 0$ annehmen. Dann ist $W-D\leq W$, woraus $l(W-D)\leq l(W)=0$ folgt und damit $l(W-D)=0$ gilt. Der Satz von Riemann liefert uns

$$l(D)\geq \deg(D)+1$$

Andererseits ist wegen $0\leq D$ nach Lemma 3.1

$$l(D)\leq l(0)+\deg(D)=1+\deg(D)$$

Folglich gilt $l(D)=\deg(D)+1-g+l(W-D)$.

□

Korollar 3.6. *Für einen kanonischen Divisor gilt $l(W)=g$.*

Beweis. Wende den Satz von Riemann-Roch auf $D=0$ an.

□

Korollar 3.7. *Ist $\deg(D)\geq 2g-1$, so folgt $l(D)=\deg(D)+1-g$.*

Beweis. Wegen Korollar 2.3 ist $\deg(W)=2g-2$, d.h. $\deg(W-D)<0$, es folgt also $l(W-D)=0$.

□

Korollar 3.8. *Ist $\deg(D)\geq 2g$, dann gilt $l(D-P)=l(D)-1$ für jeden Punkt P.*

Beweis. Folgt aus zweimaliger Anwendung von Korollar 3.7.

$$l(D-P)=\deg(D-P)+1-g=l(D)-1$$

□

Korollar 3.9 (Der Satz von Clifford)**.** *Ist $l(D)>0$ und $l(W-D)>0$, dann gilt*

$$l(D)\leq \frac{1}{2}\deg(D)+1.$$

Beweis. Aufgrund von Lemma 3.2 können wir $D,D':=W-D\geq 0$ annehmen. Ist $l(D-P)=l(D)$ für ein P, so zeigen wir die Abschätzung sogar für $D-P$, also nehmen wir $l(D-P)\neq l(D)$ für alle P an.

Wähle nun $h\in L(D)\setminus\bigcup_{P\leq D'}L(D-P)$ [11].

[11] Da es nur endlich viele solcher P gibt, nach Voraussetzung $L(D-P)\subsetneq L(D)$ gilt und $\#k=\infty$ ist, ist diese Menge nicht leer

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi' \colon L(D') \to L(W)/L(D),\ f \mapsto \overline{fh}$

φ' ist wohldefiniert, denn ist $f \in L(D')$, so gilt

$$\mathrm{div}(fh) + W = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(h) + W \geq -(W - D) - D + W = 0$$

Es gilt $\ker \varphi' = L(0)$, denn ist $f \in L(0)$, so folgt $\mathrm{div}(fh) + D \geq 0$, also $fh \in L(D)$, d.h. $\overline{fh} = \overline{0}$. Sei umgekehrt $f \in L(D')$ mit $fh \in L(D)$. Schreibe $D = \sum_P n_P P$. Falls $P \leq W - D$ ist, folgt $0 \leq \mathrm{ord}_P(f) + \mathrm{ord}_P(h) + n_P = \mathrm{ord}_P(f)$. Falls $P \nleq W - D$ gilt folgt bereits aus $f \in L(W - D)$ die Eigenschaft $0 \leq \mathrm{ord}_P(f)$.

Betrachtet man die induzierte injektive Abbildung $\varphi \colon L(D')/(L(0)) \to L(W)/L(D)$ folgt

$$l(W - D) - 1 \leq l(W) - l(D) = g - l(D)$$

unter Beachtung $l(0) = 1$, sowie Korollar 3.6. Mit dem Satz von Riemann-Roch für $l(W - D)$ folgt dann

$$g - l(D) \geq \deg(W - D) + 1 - g + l(D) - 1 = g - 2 - \deg(D) + l(D)$$

Umstellen liefert die Behauptung.

□

Man kann $l(W - D)$ auch durch Differentiale ausdrücken.

Definition Sei D ein Divisor. Wir setzen $\Omega(D) := \{\omega \in \Omega \mid \mathrm{div}(\omega) \geq D\}$. Dies ist ein Teilraum von $\Omega_k(K)$. Sei ferner $\delta(D) := \dim_k \Omega(D)$, der sogenannte *(Spezialitäts-)Index* von D.

Bemerkung Elemente von $\Omega(0)$ heißen *Differentiale erster Art* oder, falls $k = \mathbb{C}$, *holomorphe Differentiale.*

Satz 3.10. *Es gelten die folgenden Aussagen*

(i) $\delta(D) = l(W - D)$,

(ii) Es gibt g linear unabhängige Differentiale erster Art auf C,

(iii) $l(D) = \deg(D) + 1 - g + \delta(D)$

Beweis. Sei $0 \neq \omega \in \Omega, W := \mathrm{div}(\omega)$. Definiere den Vektorraumisomorphismus $\varphi \colon L(W - D) \to \Omega(D), f \mapsto f\omega$. Dies zeigt i). Aus Korollar 3.6 folgt ii) und iii) ist der Satz von Riemann-Roch.

□

4 Die Hurwitz-Formel

Wir wollen uns nun Gedanken darüber machen, wie das Geschlecht zweier Kurven unter bestimmten Voraussetzungen miteinander in Verbindung gebracht werden kann.

Seien dafür X, Y zwei nicht singuläre, projektive Kurven und $f \colon X \to Y$ ein surjektiver Morphismus. f induziert folgenden Körperhomomorphismus auf den Funktionenkörpern

$$f^* \colon K(Y) \to K(X), g \mapsto g \circ f$$

Wir fassen $K(Y)$ via f^* als Teilkörper von $K(X)$ auf und bezeichnen mit $[K(X) \colon K(Y)] := [K(X) \colon f^*(K(Y))]$ den *Grad* von f.

Lemma 4.1. *Sei $P \in X$, dann ist $f^*(\mathcal{O}_{f(P)}(Y)) \subseteq \mathcal{O}_P(X)$. Ferner werden Einheiten resp. Elemente des maximalen Ideals wieder auf solche abgebildet.*

Beweis. Sei $\frac{g}{h} \in K(Y)$ mit $h(f(P)) \neq 0$, so folgt $f^*\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{f^*(g)}{f^*(h)}$ und wegen $(f^*(h))(P) = h(f(P)) \neq 0$ ist folglich $f^*(\mathcal{O}_{f(P)}(Y)) \subseteq \mathcal{O}_P(X)$. Ebenso gilt $g(f(P)) = 0$ genau dann, wenn $(f^*(g))(P) = 0$, was die übrigen Aussagen zeigt. □

Definition Für ein $P \in X$ sei $t \in \mathcal{O}_{f(P)}(Y)$ ein uniformisierender Parameter. Wir setzen

$$e(P) := \mathrm{ord}_P(f^*(t))$$

und nennen $e(P)$ den *Verzweigungsindex* von f in P.

Bemerkung Nach Lemma 4.1 wissen wir, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des Uniformisierenden ist, da diese sich nur um eine Einheit in $\mathcal{O}_{f(P)}(Y)$ unterscheiden. Ferner ist ebenso $e(P) > 0$, da $f^*\left(\mathfrak{m}_{f(P)}(Y)\right) \subseteq \mathfrak{m}_P(X)$ gilt.

Lemma 4.2. *Sei $P \in X$, $t \in \mathcal{O}_{f(P)}(Y)$ Uniformisierendes und char$(k) = 0$. Dann gilt ord$_P(df^*(t)) = e(P) - 1$.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{O}_P(X)$ ein uniformisierender Parameter und $u \in \mathcal{O}_P(X)^\times$ so gewählt, dass $f^*(t) = uT^{e(P)}$ gilt. Es folgt

$$df^*(t) = \left(T^{e(P)}\frac{du}{dT} + e(P)uT^{e(P)-1}\right)dT$$

Nach Satz 1.6 ist $\frac{du}{dT} \in \mathcal{O}_P(X)$, ferner ist $0 \neq e(P) \in k$, daher folgt $\mathrm{ord}_P(f^*(t)) = e(P) - 1$. [12] □

Lemma 4.3. *Sei $Q \in Y$, dann gilt*

$$\sum_{\substack{P \in X \\ P \in f^{-1}(Q)}} e(P) = [K(X)\colon K(Y)]$$

Beweis. Für den Beweis sei auf [Har] II 6.9 oder [Sti] 3.1.11 verwiesen. □

Satz 4.4 (Die Hurwitz-Formel)**.** *Sei char$(k) = 0$ und g_X bzw. g_Y das Geschlecht von X bzw. Y und $n = [K(X)\colon K(Y)]$. Dann gilt*

$$2g_X - 2 = (2g_Y - 2)n + \sum_{P \in X}(e(P) - 1)$$

Beweis. Zunächst gilt für ein beliebiges $g \in K(Y)$ und ein $P \in X$

$$\mathrm{ord}_P(f^*(g)) = e(P)\mathrm{ord}_{f(P)}(g),$$

denn sei $g = ut^m$ mit $u, t \in (O)_{f(P)}(Y)$, wobei u eine Einheit und t ein Uniformisierendes ist, sowie $m = \mathrm{ord}_{f(P)}(g)$. Dann ist $f^*(g) = f^*(u)f^*(t^m) = u' \cdot f^*(t)^m = u' \cdot T^{e(P)m}$, für eine Einheit u' und einen uniformisierenden Parameter T in $\mathcal{O}_P(X)$.

[12] Da die Ordnung der beiden Summanden ungleich ist und ihre Ordnungen beide größer 0 sind, gilt, dass die Ordnung der Summe gerade das Minimum beider Ordnungen ist. Denn sei $x = ut^n, y = vt^m$ (ohne Einschränkung $m > n$), so gilt $x + y = t^n(u + vt^{m-n})$. $u + vt^{m-n}$ muss eine Einheit sein, da wegen $m - n > 0$ sonst $u \in (t)$ wäre.

Wir fassen $\Omega_k(K(X))$ als $K(Y)$-Vektorraum via f^* auf und erhalten so einen $K(Y)$-Modulhomomorphismus $\widetilde{f}\colon \Omega_k(K(Y)) \to \Omega_k(K(X))$, sodass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
K(Y) \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[dr, "d"'] & K(X) \arrow[r, "d"] & \Omega_k(K(X)) \\
& \Omega_k(K(Y)) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Für $P \in X$, $0 \neq \omega \in \Omega_k(K(Y))$ und ein Uniformisierendes $t \in \mathcal{O}_{f(P)}(Y)$ gilt $\omega = g dt$ für ein eindeutig bestimmtes $g \in K(Y)$. Nach Definition ist $\mathrm{ord}_{f(P)}(\omega) = \mathrm{ord}_{f(P)}(g)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}_P(\widetilde{f}(\omega)) &= \mathrm{ord}_P\left(\widetilde{f}(gdt)\right) \\
&= \mathrm{ord}_P(f^*(g)\widetilde{f}(dt)) \\
&= \mathrm{ord}_P(f^*(g)) + \mathrm{ord}_P(df^*(t)) \\
&= e(P)\mathrm{ord}_{f(P)}(g) + e(P) - 1 \\
&= e(P)\mathrm{ord}_{f(P)}(\omega) + e(P) - 1
\end{aligned}$$

Es folgt die Hurwitz-Formel

$$\begin{aligned}
2g_X - 2 &= \deg(\mathrm{div}(\widetilde{f}(\omega))) \\
&= \sum_{P\in X} \mathrm{ord}_P(\widetilde{f}(\omega)) \\
&= \sum_{P\in X} \left(e(P)\mathrm{ord}_{f(P)}(\omega) + e(P) - 1\right) \\
&= \sum_{Q\in Y}\left(\sum_{P\in f^{-1}(Q)} e(P)\right)\mathrm{ord}_Q(\omega) + \sum_{P\in X}(e(P)-1) \\
&= \left(\sum_{Q\in Y}\mathrm{ord}_Q(\omega)\right) n + \sum_{P\in X}(e(P)-1) \\
&= (2g_Y - 2)n + \sum_{P\in X}(e(P)-1)
\end{aligned}$$

□

Literatur

[Ful] W. Fulton. *An Introduction to Algebraic Geometry.* Addison Wesley Longman Publishing Co, 2008.

[Har] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer, 1977.

[Sti] H. Stichtenoth. *Algebraic Function Fields and Codes.* Springer, 2009.