Es bezeichne C immer eine irreduzible, nicht-singuläre, projektive ebene Kurve. Ferner sei $K = K(C)$ der Funktionenkörper von C und für $P \in C$ bezeichne $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_P(C)$ den lokalen Ring bei P.

1 Divisoren

Wir wollen zunächst die Sprache der Divisoren einführen, um damit auf effiziente Weise Aussagen treffen zu können.

Definition (i) Ein Divisor auf C ist eine formale Summe

$$D = \sum_{P \in C} n_P P,$$

wobei $n_P \in \mathbb{Z}$ fast alle Null. Die Divisoren auf C bilden eine abelsche Gruppe. Wir werden in Folgenden einfach von Divisoren reden und meinen damit Divisoren auf C.

(ii) Sei $D = \sum_{P \in C} n_P P$ ein Divisor. Dann heißt

$$\deg D := \sum_{P \in C} n_P$$

der Grad von D.
Ist $D' = \sum_{P \in C} m_P P$ ein weiterer Divisor, so schreiben wir

$$D \leq D' :\Leftrightarrow n_P \leq m_P \quad \forall P \in C.$$

D heißt positiv, falls $D \geq 0$.

(iii) Sei G eine ebene projektive Kurve, die C nicht als Komponente enthält. Dann heißt

$$\operatorname{div}(G) := \sum_{P \in C} \operatorname{ord}_P(G) P$$

der Divisor von G.
Sei $z \in K^\times$. Dann heißt

$$\operatorname{div}(z) := \sum_{P \in C} \operatorname{ord}_P(z) P$$

der Divisor von z. Ferner heißen

$$(z)_0 := \sum_{\operatorname{ord}_P(z) > 0} \operatorname{ord}_P(z) P,$$
$$(z)_\infty := \sum_{\operatorname{ord}_P(z) < 0} -\operatorname{ord}_P(z) P$$

der Null- bzw. Polstellendivisor von z.

Bemerkung (i) Der Grad ist additiv, d.h. für Divisoren D, D' gilt $\deg D + \deg D' = \deg(D + D')$.

(ii) $\operatorname{div}(G)$ ist ein Divisor. Nach Eigenschaft (8) der Schnittzahl gilt nämlich gerade $\operatorname{ord}_P(G) = I(P, G \cap C)$. Nach dem Satz von Bézout gilt daher auch $\deg(\operatorname{div} G) = \deg(G)\deg(C)$.

(iii) $\operatorname{div}(z)$ ist ein Divisor. Schreibe nämlich $z = \frac{f}{g}$, wobei $f, g \in \Gamma_h(C)$ Restklassen von homogenen Polynomen gleichen Grades $F, G \in k[X, Y, Z]$. Dann gilt gerade $\operatorname{div}(z) = \operatorname{div}(F) - \operatorname{div}(G)$. Es gelten für $z, z' \in K^\times$ ferner die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(zz') &= \operatorname{div}(z) + \operatorname{div}(z'), \\ \operatorname{div}(z^{-1}) &= -\operatorname{div}(z), \\ \operatorname{div}(z) &= (z)_0 - (z)_\infty. \end{aligned}$$

Proposition 1 *Sei $z \in K^\times$. Dann ist $\deg(\operatorname{div}(z)) = 0$.*

Beweis Schreibe $z = \frac{f}{g}$ mit f, g, F, G wie in obiger Bemerkung. Sei ferner $\deg C = n$ und $\deg F = m = \deg G$. Dann folgt

$$\deg(\operatorname{div}(z)) = \deg(\operatorname{div}(F)) - \deg(\operatorname{div}(G)) = mn - mn = 0.$$

Korollar 2 *Für $z \in K^\times$ sind äquivalent:*

(i) $z \in k$,

(ii) $\operatorname{div}(z) = 0$,

(iii) $\operatorname{div}(z) \geq 0$.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar. Zu zeigen bleibt (iii) $\Rightarrow$ (i). Sei also $\operatorname{div}(z) \geq 0$. Dann gilt $z \in \mathcal{O}_P$ für alle $P \in C$. Sei $P_0 \in C$ beliebig gewählt und $z(P_0) = \lambda_0 \in k$. Angenommen $z \neq \lambda_0$. Da auch $z - \lambda_0 \in \mathcal{O}_P$ für alle $P \in C$, ist $\operatorname{div}(z - \lambda_0) \geq 0$ und somit sicher $\deg(\operatorname{div}(z - \lambda_0)) > 0$, was ein Widerspruch zu Proposition 1 ist.

Korollar 3 *Für $z, z' \in K^\times$ gilt* $\operatorname{div}(z) = \operatorname{div}(z') \Leftrightarrow \frac{z}{z'} \in k$.

Definition Zwei Divisoren D, D' heißen linear äquivalent, falls es ein $z \in K$ gibt, sodass

$$D = D' + \operatorname{div}(z).$$

Man schreibt in diesem Fall $D \equiv D'$.

Proposition 4 *(i) „$\equiv$“ ist eine Äquivalenzrelation.*

(ii) $D \equiv 0$ genau dann, wenn ein $z \in K$ existiert, sodass $D = \operatorname{div}(z)$.

(iii) Ist $D \equiv D'$, so gilt $\deg D = \deg D'$.

(iv) *Ist* $D \equiv D'$ *und* $D_1 \equiv D_1'$, *so auch* $D + D_1 \equiv D' + D_1'$.

(v) $D \equiv D'$ *genau dann, wenn es Kurven* G *und* G' *von gleichem Grad gibt, sodass* $D + \operatorname{div}(G) = D' + \operatorname{div}(G')$.

Beweis Aussage (iii) folgt mit Proposition 1. Die übrigen Aussagen folgen sofort aus der Definition der linearen Äquivalenz.

2 Die Vektorräume $L(D)$

Der Gegenstand unserer Überlegungen sollen rationale Funktionen sein, die höchstens an endlich vielen ausgewählten Punkten Polstellen mit beschränkter Ordnung haben. Diese Funktionen werden in der folgenden Definition erfasst:

Definition Sei $D = \sum_{P \in C} n_P P$ ein Divisor. Dann definieren wir

$$L(D) := \{f \in K \mid \operatorname{ord}_P(f) \geq -n_P \ \forall P \in C\}.$$

Dies ist ein k-Vektorraum. Wir setzen $l(D) := \dim_k L(D)$.

Bemerkung Für $f \in K^\times$ gilt somit gerade: $f \in L(D) \Leftrightarrow \operatorname{div}(f) + D \geq 0$.

Unser Ziel wird es nun sein, die Dimension dieses Vektorraums zu bestimmen. Als ersten Schritt wollen wir daher einsehen, dass $L(D)$ immer endlichdimensional ist.

Proposition 5 *Seien* D *und* D' *Divisoren.*

(i) *Für* $D \leq D'$ *ist* $L(D) \subseteq L(D')$ *und* $\dim_k(L(D')/L(D)) \leq \deg(D' - D)$.

(ii) $L(0) = k$.

(iii) *Ist* $\deg D < 0$ *so gilt* $L(D) = 0$.

(iv) *Ist* $\deg D \geq 0$ *so gilt* $l(D) \leq \deg D + 1$.

(v) *Ist* $D \equiv D'$, *so gilt* $l(D) = l(D')$.

Beweis (i) Dass $L(D) \subseteq L(D')$ gilt, ist klar. Schreibe $D' = D + P_1 + \ldots + P_s$, wobei $s = \deg(D' - D)$. Man erhält eine Kette

$$L(D) \subseteq L(D + P_1) \subseteq L(D + P_1 + P_2) \subseteq \ldots \subseteq L(D').$$

Wegen bekannter Dimensionsformeln aus der Linearen Algebra genügt es daher zu zeigen:

$$\dim_k(L(D+P)/L(D)) \leq 1 \ \forall P \in C.$$

Sei hierzu $P \in C$ fest gewählt und $t \in \mathcal{O}_P$ ein uniformisierendes Element. Es sei weiter $r := n_P$ der Koeffizient von D am Punkt P. Setze

$$\phi : L(D + P) \to k, \ f \mapsto (t^{r+1} f)(P).$$

Wir erhalten die folgenden Aussagen

(1) ϕ ist wohldefiniert, denn für $f \in L(D+P)$ gilt:

$$\operatorname{ord}_P(t^{r+1}f) = r+1+\operatorname{ord}_P(f) \geq r+1-(r+1) = 0.$$

(2) ϕ ist linear.

(3) Für $0 \neq f \in L(D+P)$ gilt

$$\begin{aligned} f \in \ker\phi &\Leftrightarrow \operatorname{ord}_P(t^{r+1}f) = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{ord}_P f > -(r+1) \\ &\Leftrightarrow f \in L(D). \end{aligned}$$

Somit erhält man mit dem Homomorphiesatz eine Injektion

$$L(D+P)\big/L(D) \hookrightarrow k$$

und damit die Aussage.

(ii) Nach Korollar 2 gilt für $f \in K^\times$ gerade:

$$f \in L(0) \Leftrightarrow \operatorname{div}(f) \geq 0 \Leftrightarrow f \in k$$

(iii) Sei D ein Divisor mit $\deg D < 0$. Angenommen es gäbe ein $f \in L(D)$ mit $f \neq 0$. Dann folgt

$$\operatorname{div}(f) + D \geq 0 \Rightarrow \operatorname{div}(f) \geq -D \Rightarrow \deg(\operatorname{div}(f)) \geq \deg(-D) > 0,$$

was ein Widerspruch zu Proposition 1 ist.

(iv) Sei $n := \deg D \geq 0$. Wähle $P \in C$ beliebig und setze $D' := D-(n+1)P$. Dann gilt gerade $\deg D' < 0$ und mit (ii) daher $L(D') = 0$. Es folgt mit (i):

$$l(D) = \dim_k(L(D)\big/L(D')) \leq \deg(D-D') = n+1 = \deg D + 1.$$

(v) Schreibe $D = D' - \operatorname{div}(g)$ für ein $g \in K^\times$. Dann ist

$$\phi : L(D) \to L(D'),\ f \mapsto fg^{-1}$$

ein Isomorphismus, denn ϕ ist linear und injektiv und es gilt für $f \in K^\times$:

$$\begin{aligned} f \in L(D) &\Leftrightarrow \operatorname{div}(f) + D \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g) + D' \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{div}(fg^{-1}) + D' \geq 0 \\ &\Leftrightarrow fg^{-1} \in L(D') \end{aligned}$$

und damit folgt die Surjektivität.

Wenn D ein Divisor von großem Grad ist, so erwarten wir, dass auch $L(D)$ ein Vektorraum hoher Dimension ist. Wir wollen zunächst zwei Lemmata zeigen, um dies in Proposition 8 für Divisoren einer speziellen Form nachzuweisen und im darauffolgenden Satz von Riemann auf beliebige Divisoren zu verallgemeinern.

Definition Sei $S \subseteq C$ und $D = \sum_{P \in C} n_P P$ ein Divisor. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \deg^S(D) &:= \sum_{P \in S} n_P, \\ L^S(D) &:= \{f \in K \mid \mathrm{ord}_P f \geq -n_P \ \forall P \in S\}. \end{aligned}$$

Lemma 6 *Sei $S \subseteq C$ und $D \leq D'$. Dann gilt $L^S(D) \subseteq L^S(D')$ und falls S endlich ist, gilt*

$$\dim_k({L^S(D')}/{L^S(D)}) = \deg^S(D' - D).$$

Beweis Wie im obigen Beweis von Proposition 5(i) genügt es zu zeigen:

$$\dim_k({L^S(D+P)}/{L^S(D)}) = 1 \ \forall P \in S.$$

Analog sei hierzu wieder $\phi : L^S(D+P) \to k$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass ϕ surjektiv ist, was in dem vorliegenden Fall gleichbedeutend ist mit $\ker \phi \neq 0$. Wir brauchen also $f \in K^\times$ mit

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}_P(f) > -(r+1), \\ &\mathrm{ord}_Q(f) \geq n_Q \ \forall Q \in S \setminus \{P\}. \end{aligned}$$

Da S endlich ist, lässt sich so ein f konstruieren, vergleiche Appendix 1.

Lemma 7 *Sei $x \in K$, $x \notin k$. Dann ist $K/k(x)$ endlich algebraische Körpererweiterung.*

Beweis Ohne Einschränkung ist C eine affine Kurve (Wähle eine Variable, sodass C nicht die unendlich ferne Gerade bezüglich dieser Variablen ist. Dann ist C_* affine Varietät mit $\dim C = \dim C_*$. Die Dehomogenisierung nach der entsprechenden Variable induziert eine Isomorphie der Funktionenkörper). Dann ist K/k endlich erzeugte Körpererweiterung und es gilt

$$\mathrm{tr.deg}(K/k) = \dim C = 1.$$

Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist x über k transzendent. Somit ist $K/k(x)$ eine endlich algebraische Körpererweiterung.

Proposition 8 *Sei $x \in K$, $x \notin k$. Sei weiter $Z := (x)_0$ und $n := [K : k(x)]$. Dann gilt:*

(i) $\deg Z = n$.

(ii) Es gibt eine Konstante $\tau \in \mathbb{N}$, sodass $l(rZ) \geq rn - \tau$ für alle $r \geq 0$.

Beweis Sei $Z = \sum_{P \in C} n_P P$, $S := \{P \in C \mid n_P > 0\}$ und $m := \deg Z$. Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

(1) Wir zeigen zunächst $m \leq n$:
Nach Lemma 6 gibt es $\nu_1, \ldots, \nu_m \in L^S(0)$, sodass die Restklassen $\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_m$ eine Basis von ${L^S(0)}/{L^S(-Z)}$ bilden. Angenommen $\nu_1, \ldots, \nu_m$ wären linear abhängig über $k(x)$. Dann gibt es $g_i \in k(x)$, sodass

$$\sum g_i \nu_i = 0.$$

Ohne Einschränkung gilt $g_i = \lambda_i + x h_i$, wobei $\lambda_i \in k$, nicht alle Null und $h_i \in k[x]$, da wir obige Gleichung zunächst mit den Nennern der g_i multiplizieren und dann durch geeignete x-Potenzen teilen können. Es folgt

$$\sum \lambda_i \nu_i = -x \sum h_i \nu_i.$$

Es gilt $-x \sum h_i \nu_i \in L^S(-Z)$, denn: ist $P \in S$, dann gilt wegen $\operatorname{ord}_P(x) = n_P > 0$ auch $\operatorname{ord}_P(h_i) > 0$. Da außerdem $\operatorname{ord}_P(\nu_i) \geq 0$, erhält man insgesamt

$$\operatorname{ord}_P(-x \sum h_i \nu_i) = \operatorname{ord}_P(x) + \operatorname{ord}_P(-\sum h_i \nu_i) \geq \operatorname{ord}_P(x) = n_P.$$

Es folgt

$$\sum \lambda_i \bar{\nu}_i = \overline{\sum \lambda_i \nu_i} = \overline{-x \sum h_i \nu_i} = 0,$$

was ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $\bar{\nu}_i$ ist. Also sind die $\nu_1, \ldots, \nu_m$ linear unabhängig und damit ist $m \leq n$.

(2) Wir zeigen nun Teil (ii) der Aussage:
Sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von $K/k(x)$ mit

$$w_i^{n_i} + a_{i1} w_i^{n_i - 1} + \ldots + a_{in_i} = 0,$$

wobei wir durch geschicktes Multiplizieren mit entsprechenden Nennern und Teilen durch x-Potenzen ohne Einschränkung annehmen können, dass alle $a_{ij} \in k[x^{-1}]$. Sei $P \in C \setminus S$. Da dort gerade $\operatorname{ord}_P(x^{-1}) > 0$ gilt, gilt auch $\operatorname{ord}_P(a_{ij}) \geq 0$. Angenommen $\operatorname{ord}_P(w_i) < 0$. Dann folgt

$$\operatorname{ord}_P(a_{ij} w_i^{n_i - j}) = \operatorname{ord}_P(a_{ij}) + (n_i - j)\operatorname{ord}_P(w_i) > n_i \operatorname{ord}_P(w_i) = \operatorname{ord}_P(w_i^{n_i})$$

und dies führt mit Appendix 2 zu einem Widerspruch. Da also gilt

$$\operatorname{ord}_P(w_i) < 0 \Rightarrow P \in S,$$

lässt sich ein t wählen, sodass

$$\operatorname{div}(w_i) + tZ \geq 0$$

für alle $i = 1, \ldots, n$. Sei $r \geq 0$. Es folgt, dass $w_i x^{-j} \in L((r+t)Z)$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, r$, denn:

(a) Ist $P \in S$, d.h. $n_p = \mathrm{ord}_P(x) > 0$, so folgt

$$\mathrm{ord}_P(w_i x^{-j}) = \mathrm{ord}_P(w_i) - j\mathrm{ord}_P(x) \geq -tn_p - rn_p = -(r+t)n_p$$

(b) Ist $P \notin S$, d.h. $\mathrm{ord}_P(x) \leq 0$ und $n_p = 0$, so folgt

$$\mathrm{ord}_P(w_i x^{-j}) = \mathrm{ord}_P(w_i) - j\mathrm{ord}_P(x) \geq \mathrm{ord}_P(w_i) \geq 0 = -(r+t)n_p$$

Da x^{-1} transzendent über k ist, sind $1, x^{-1}, \ldots, x^{-r}$ linear unabhängig über k. Da ferner $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig über $k(x)$ sind, lässt sich folgern, dass die Produkte $w_i x^{-j}$ linear unabhängig über k sind. Man erhält also die Abschätzung

$$n(r+1) \leq l((r+t)Z) = l(rZ) + \dim_k({}^{L((r+t)Z)}/_{L(rZ)}) \leq l(rZ) + tm,$$

wobei für die letzte Ungleichung Proposition 5(i) genutzt wird. Für $\tau = tm - n$ gilt daher

$$l(rZ) \geq rn - \tau.$$

(3) Zuletzt zeigen wir $n \leq m$:
Mit dem eben Bewiesenen und Proposition 5(iii) gilt für beliebiges $r \geq 0$

$$rn - \tau \leq l(rZ) \leq rm + 1.$$

Dies kann nur stimmen, falls $n \leq m$.

3 Der Satz von Riemann

Satz 9 *(Riemann). Es gibt eine nicht negative ganze Zahl g, sodass für alle Divisoren D gilt*

$$l(D) \geq \deg(D) + 1 - g.$$

Das kleinste solche g heißt Geschlecht von C.

Beweis Wir schreiben $s(D) := \deg(D) + 1 - l(D)$. Dann brauchen wir also g mit der Eigenschaft $s(D) \leq g$ für alle Divisoren D. Zunächst einige Bemerkungen:

(1) $s(0) = 0$, d.h. $g \geq 0$ (falls existent).

(2) $D \equiv D' \Rightarrow s(D) = s(D')$.

(3) $D \leq D'$ impliziert

$$l(D') - l(D) = \dim_k({}^{L(D')}/_{L(D)}) \leq \deg(D') - \deg(D)$$

und daher auch $s(D) \leq s(D')$.

Sei nun $x \in K,\ x \notin k$ und $Z := (x)_0$. Sei τ minimal gewählt, sodass es die Ungleichung aus Proposition 8 noch erfüllt. Dann folgt

$$s(rZ) = r\deg(Z) + 1 - l(rZ) \leq \tau + 1\ \forall r \geq 0,$$

das heißt

$$s(0) \leq s(Z) \leq s(2Z) \leq s(3Z) \leq \ldots \leq \tau + 1.$$

Da τ minimal gewählt war, gibt es somit ein r_0, sodass für alle $r \geq r_0$ gilt:

$$s(rZ) = \tau + 1.$$

Setze $g := \tau + 1$. Falls nun $s(D) \leq g$ für alle Divisoren D gilt, so ist g nach gerade Gezeigtem bereits das Geschlecht von C. Hierfür genügt es nun zu zeigen, dass es für jeden Divisor D einen Divisor $D' \equiv D$ und ein $r \geq 0$ gibt, sodass $D' \leq rZ$. Dann folgt nämlich

$$s(D) = s(D') \leq s(rZ) \leq g.$$

Wir schreiben $Z = \sum_{P \in C} n_P P$ und $D = \sum_{P \in C} m_P P$. Wir benötigen $f \in K^\times$ mit

$$D - \operatorname{div}(f) \leq rZ,$$

das heißt

$$m_p - \operatorname{ord}_P(f) \leq rn_P\ \forall P \in C.$$

Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} y &:= x^{-1}, \\ T &:= \{P \in C \mid m_P > 0,\ \operatorname{ord}_P(y) \geq 0\}, \end{aligned}$$

und unterscheiden zwei Fälle:

(a) $T = \emptyset$:
Dann gilt also ($m_P > 0 \Rightarrow \operatorname{ord}_P(y) < 0 \Rightarrow \operatorname{ord}_P(x) > 0 \Rightarrow n_P > 0$). Da $m_P > 0$ nur für endlich viele P gilt, lässt sich also mit r groß genug bereits $D \leq rZ$ erreichen.

(b) $T \neq \emptyset$:
Definiere in diesem Fall

$$f := \prod_{P \in T} (y - y(P))^{m_P} \in K.$$

Dieses f soll nun die gewünschte Eigenschaft haben. Um dies zu sehen, betrachtet man zwei Fälle:

(i) $\operatorname{ord}_P(y) \geq 0$, d.h. $\operatorname{ord}_P(x) \leq 0$ und $n_p = 0$:
Man überprüft leicht, dass in diesem Fall nach Konstruktion

$$m_p - \operatorname{ord}_P(f) \leq 0 = rn_P$$

für beliebiges r gilt.

(ii) $\mathrm{ord}_P(y) < 0$, d.h. $n_P = \mathrm{ord}_P(x) > 0$:
Dieser Fall tritt nur für endliche viele P auf. Da $n_P > 0$, gilt also mit r groß genug die gewünschte Ungleichung für alle solche P.

Insgesamt ist damit der Satz von Riemann bewiesen.

Korollar 10 *(i) Ist $s(D_0) = g$ und $D \equiv D' \geq D_0$, so auch $s(D) = 0$.*

(ii) Sei $x \in K,\ x \notin k$. Dann gilt $s(r(x)_0) = g$ für alle r groß genug.

(iii) Es gibt eine ganze Zahl $N \in \mathbb{Z}$, sodass für alle Divisoren D mit $\deg D \geq N$ gilt

$$l(D) = \deg D + 1 - g.$$

Beweis (i) und (ii) wurden bereits im Beweis zum Satz von Riemann gezeigt. Zu zeigen bleibt (iii):
Sei D_0 ein Divisor mit $s(D_0) = g$. Setze $N := \deg(D_0) + g$. Dann gilt für jeden Divisor D mit $\deg(D) \geq N$

$$l(D - D_0) \geq \deg(D) - \deg(D_0) + 1 - g \geq 1,$$

wobei für die erste Abschätzung der Satz von Riemann benutzt wird. Somit gibt es $0 \neq f \in L(D - D_0)$. Dies bedeutet gerade

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}(f) + D - D_0 \geq 0 \\ \Rightarrow &\mathrm{div}(f) + D \geq D_0 \end{aligned}$$

und mit (i) folgt $s(D) = g$.

Proposition 11 *Die Kurve C habe den Grad n. Dann gilt*

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Beweis Sei C gegeben durch das homogene Polynom F. Sei $D_m := \mathrm{div}(Z^m)$ - falls $C = Z$, ist $\mathrm{div}(Z^m)$ nicht definiert, wähle in diesem Fall X^m - und sei ferner

$$V_m = \{G \in k[X, Y, Z] \mid G \text{ homogen vom Grad } m\}.$$

Die Sequenz

$$0 \longrightarrow V_{m-n} \xrightarrow{\psi} V_m \xrightarrow{\phi} L(D_m) \longrightarrow 0$$

ist exakt, wobei

$$\begin{aligned} &\phi\colon V_m \to L(D_m),\ G \mapsto \frac{[G]}{[Z^m]}, \\ &\psi\colon V_{m-n} \to V_m,\ H \mapsto FH, \end{aligned}$$

denn:

(i) ϕ ist wohldefiniert: $\operatorname{div}(\frac{[G]}{[Z^m]}) = \operatorname{div}(G) - \operatorname{div}(Z^m) \geq -D_m$.

(ii) ϕ ist offensichtlich linear.

(iii) ϕ ist surjektiv, denn: Sei $f = \frac{[R]}{[S]} \in L(D_m)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(R) - \operatorname{div}(S) = \operatorname{div}(f) \geq -\operatorname{div}(Z^m) \\ \Rightarrow\ & \operatorname{div}(RZ^m) \geq \operatorname{div}(S). \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber gerade, dass die Noetherbedingungen in jedem $P \in C$ erfüllt sind (vgl.Vortrag 3 Proposition 2.2, sowie Bemerkung(ii)). Nach dem Satz von Max Noether gibt es also $A, B \in k[X, Y, Z]$ homogen mit $\deg(A) = m$, sodass gilt

$$\begin{aligned} & RZ^m = AS + BF \\ \Rightarrow\ & \frac{[R]}{[S]} = \frac{[A]}{[Z^m]} \\ \Rightarrow\ & \phi(A) = f. \end{aligned}$$

(iv) Die Abbildung ψ ist wohldefiniert und injektiv. Ferner gilt

$$\begin{aligned} G \in \ker\phi &\Leftrightarrow \frac{[G]}{[Z^m]} = 0 \\ &\Leftrightarrow F \mid G \\ &\Leftrightarrow G \in \operatorname{im}\psi. \end{aligned}$$

Also ist obige Sequenz tatsächlich exakt. Man überlegt sich leicht, dass

$$\dim(V_m) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Die Dimension von $L(D_m)$ lässt sich also wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} l(D_m) &= \dim(V_m) - \dim(V_{m-n}) \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(m^2 + 3m + 2 - (m^2 - 2nm + 3m - 3n + n^2 + 2)) \\ &= \frac{1}{2}(2nm - (3n + n^2)) \\ &= nm - \frac{3n - n^2}{2} \\ &= nm + 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \deg(D_m) + 1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

Da $\deg(D_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ folgt die gewünschte Formel mit Korollar 10(iii).

4 Appendix

Appendix 1 *Sei C eine irreduzible, projektive, ebene Kurve und $P_1, \dots, P_n$ seien einfache Punkte auf C. Seien ferner $m_1, \dots, m_n$ ganze Zahlen. Dann gibt es $f \in K(C)$, sodass $ord_{P_i}(f) = m_i$ für $i = 1, \dots n$.*

Beweis Sei L_i eine Gerade durch P_i, die kein P_j für $j \neq i$ enthält. Ferner sei L_i keine Tangente an C im Punkt P_i (solch eine Gerade existiert, vergleiche den Vortrag über den Satz von Bézout, Lemma 4.8). Sei ferner L eine Gerade, die keines der P_i enthält enthält. Setze nun

$$f := \frac{[\prod L_i^{m_i}]}{[L^{-\sum m_i}]}.$$

Dann gilt tatsächlich $f \in K(C)$ und für $j \in \{1, \dots, , n\}$ ist

$$\mathrm{ord}_{P_j}(f) = \mathrm{ord}_{P_j}(\prod_i L_i^{m_i}) - \underbrace{\mathrm{ord}_{P_j}(L^{-\sum m_i})}_{=0} = \sum_i m_i \, \mathrm{ord}_{P_j}(L_i) = \sum_i m_i \delta_{ij} = m_j.$$

Appendix 2 *Sei R ein diskreter Bewertungsring und $K = \mathrm{Quot}(R)$.*

(i) Seien $a, b \in K$ mit $\mathrm{ord}(a) < \mathrm{ord}(b)$. Dann gilt $\mathrm{ord}(a + b) = \mathrm{ord}(a)$.

*(ii) Seien $a_1, \dots, a_n \in K$ und für ein i gelte $\mathrm{ord}(a_i) < \mathrm{ord}(a_j)$ $\forall j \neq i$.
Dann gilt $a_1 + \dots + a_n \neq 0$.*

Beweis (i) Mit der ultrametrischen Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(a+b) &\geq \min\{\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b)\} \\ &= \mathrm{ord}(a) \\ &= \mathrm{ord}(a+b-b) \\ &\geq \min\{\mathrm{ord}(a+b), \mathrm{ord}(b)\} \\ &= \mathrm{ord}(a+b), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt noch einmal die Vorraussetzung $\mathrm{ord}(a) < \mathrm{ord}(b)$ eingeht. Es folgt $\mathrm{ord}(a + b) = \mathrm{ord}(a)$.

(ii) Ohne Einschränkung gelte $\mathrm{ord}(a_1) < \mathrm{ord}(a_j)$ für $j \neq 1$. Dann folgt $\mathrm{ord}(a_1) \neq \infty = \mathrm{ord}(0)$. Durch iterierte Anwendung von (i) erhält man aber auch

$$\mathrm{ord}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \mathrm{ord}(a_1).$$

Daher muss $a_1 + \dots + a_n \neq 0$ gelten.