Seminar Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven

Der Satz von Bézout

Seminarvortrag bei Prof. Dr. K. Wingberg, O. Thomas
Wintersemester 2014/15

Marcus Kühn

1 Vorbemerkungen

Folgendes gelte wenn im lokalen Kontext nicht anders spezifiziert:

- k bezeichne einen algebraisch abgeschlossenen Körper, dieser diene als Grundkörper.
- Die Verschwindungsmenge einer Menge M von Polynomen bzw. eines Polynoms f werde mit $V(M)$ bzw. $V(f)$ bezeichnet.
- Für ein Polynom f bezeichne f^* die Homogenisierung (mit einer neuen Variablen); f_* die Dehomogenisierung (nach einer dem Kontext zu entnehmenden Variablen).
- Der lokale Ring eines Punktes P einer Varietät V werde mit $\mathcal{O}_P(V)$ bezeichnet.
- Der Grad eines Polynoms $\sum_{i=1}^n \left(a_i \prod_{j=1}^m X_j^{e_{i,j}}\right) \in k[X_1, \ldots, X_m]$ ($m, n \in \mathbb{N}$, $a_i \neq 0$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$) sei gegeben durch:
$$\sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} (e_{i,1} + \ldots + e_{i,m})$$
- Der Funktionenkörper einer Varietät V werde mit $k(V)$ bezeichnet.

2 Projektive ebene Kurven

Definition 2.1 (Äquivalenz homogener Polynome, projektive ebene Kurven)**.** Zwei nicht konstante homogene Polynome $F, G \in k[X_1, X_2, X_3]$ heißen *äquivalent*, falls gilt:
$$\exists \lambda \in k^\times : G = \lambda F$$
Eine *projektive ebene Kurve* ist eine bezüglich der so gegebenen Äquivalenzrelation gegebene Äquivalenzklasse von homogenen Polynomen. Im Folgenden werden Repräsentanten oft stellvertretend für die von ihnen repräsentierte Äquivalenzklasse verwendet.

Definition 2.2 (Grad einer projektiven ebenen Kurve)**.** Der *Grad* einer projektiven ebenen Kurve ist der Grad einer ihrer Repräsentanten. Kurven vom Grad 1 werden hier als Geraden, Kurven vom Grad 2 als Koniken, Kurven vom Grad 3 als Kubiken und Kurven vom Grad 4 als Quartiken bezeichnet.

Definition 2.3 (Vielfachheit einer projektiven ebenen Kurve in einem Punkt)**.** Sei F eine projektive ebene Kurve und P ein Punkt der projektiven Ebene. Sei $U_i := \mathbb{P}^2 \backslash V(X_i)$ für $i = 1, 2, 3$ und sei $j \in \{1, 2, 3\}$ so gewählt, dass $P \in U_j$. Sei dann F_* die Dehomogenisierung von F nach X_j, also die Äquivalenzklasse der Dehomogenisierung eines Repräsentanten von F nach X_j und werde im Folgenden als affine ebene Kurve aufgefasst. Die *Vielfachheit* $m_P(F)$ von F bei P wird definiert als:
$$m_P(F) := m_P(F_*)$$

Bemerkung 2.4. Die Vielfachheit einer projektiven ebenen Kurve in einem Punkt ist wohldefiniert: Es ist die Unabhängigkeit von der Wahl der Variable zu zeigen, nach der F dehomogenisiert wird. Dies werde unter der Voraussetzung bewiesen, dass F irreduzibel ist und verallgemeinert sich auf beliebige F, da die Vielfachheit einer ebenen Kurve in einem Punkt im affinen die Summe über die Vielfachheiten der irreduziblen Komponenten der Kurve in diesem Punkt ist. Sei F also im Folgenden als irreduzibel angenommen.
Es bezeichne F_i die Dehomogenisierung von F nach X_i für $i = 1, 2, 3$. Für etwa $P \in U_3$, $P = (x : y : z)$ vermittelt die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \phi : & k(X_1, X_2, X_3) & \to & k(X_1, X_2), \\ & q(X_1, X_2, X_3) & \mapsto & q(X_1, X_2, z) \end{array}$$

einen Isomorphismus lokaler Ringe $\mathcal{O}_P(F) \cong \mathcal{O}_{(x,y)}(F_3)$; ebenso kann für $P \in U_1$ und $P \in U_2$ verfahren werden und es folgt, dass die lokalen Ringe unabhängig von der Wahl von j sind. Da die Vielfachheit im Affinen in einem Punkt nur vom lokalen Ring in der Kurve in diesem Punkt abhängt, ist die Vielfachheit im Projektiven somit wohldefiniert.

Bemerkung 2.5. Da die Vielfachheit im Projektiven als die Vielfachheit einer zugehörigen, affinen, ebenen Kurve definiert ist, folgt aus der bekannten Invarianz der Vielfachheit im affinen Fall unter affinem Koordinatenwechsel die Invarianz der Vielfachheit im projektiven Fall unter projektivem Koordinatenwechsel.

Definition 2.6 (Ordnung eines homogenen Polynoms)**.** Sei F eine projektive ebene Kurve und P ein Punkt der projektiven Ebene. Ist P ein einfacher Punkt auf F und F irreduzibel, so ist $\mathcal{O}_P(F)$ ein diskreter Bewertungsring (folgt aus den gleichen Gründen wie im affinen Fall). Es bezeichne ord_P^F die zugehörige Exponentialbewertung auf $k(F)$. Sei L eine beliebige nicht durch P verlaufende projektive Gerade (eine solche ist beispielsweise durch $V(X_i)$ für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben). Für ein homogenes Polynom G aus $k[X_1, X_2, X_3]$ sei $G_* := \frac{G}{L^{\deg(G)}} \in \mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$ (für $P = (x : y : z)$ und $z \neq 0$ kann $L = X_3$ gewält werden, dann entspricht $G_* = \frac{G}{X_3^{\deg(G)}} \in k(\mathbb{P}^2)$ bezüglich der Identifikation von $k(\mathbb{P}^2)$ mit $k(\mathbb{A}^2)$ gerade der Dehomogenisierung von G nach X_3) und $\overline{G_*}$ die Restklasse von G_* in $\mathcal{O}_P(F)$. Wir definieren

$$\mathrm{ord}_P^F(G) := \mathrm{ord}_P^F(\overline{G_*})$$

Bemerkung 2.7. Die Ordnung eines homogenen Polynoms ist wohldefiniert: Seien P, F, G und L wie in der Definition der Ordnung eines homogenen Polynoms gewählt. Es ist die Unabhängigkeit von der Wahl von L zu zeigen. Sei also L' eine andere nicht durch P verlaufende affine Gerade. Es gilt dann:

$$\frac{G}{L'^{\deg(G)}} = \left(\frac{L}{L'}\right)^{\deg(G)} \frac{G}{L^{\deg(G)}}$$

Nach Wahl von L und L' ist $\frac{L}{L'}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$, die verschiedenen Möglichkeiten für $\overline{G_*}$ unterscheiden sich also nur um Einheiten und ihre Bewertungen stimmen damit überein.

Definition 2.8 (Schnittzahlen im ebenen projektiven Fall)**.** Seien F und G zwei projektive ebene Kurven und $P \in \mathbb{P}^2$. Die *Schnittzahl* $I(P, F \cap G)$ wird als

$$I(P, F \cap G) := \dim_k \left(\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2) \big/ (F_*, G_*) \right)$$

definiert, wobei F_* und G_* wie in 2.6 gewählt seien. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von F_* und G_*, da sich die verschiedenen Wahlmöglichkeiten wie in 2.7 gesehen nur um Einheiten in $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$ unterscheiden.

Bemerkung 2.9. Eigenschaften der Schnittzahl im ebenen projektiven Fall) Die hier definierte Schnittzahl für den ebenen projektiven Fall besitzt nach ihrer Definition und er Isomorphie lokaler Ringe aus Bemerkung 2.4 zu den Eigenschaften der Schnittzahl im Affinen analoge Eigenschaften:
Seien F,G und P wie in 2.8 gewählt.

(i) $I(P, F \cap G)$ ist eine nichtnegative ganze Zahl, falls F und G keine gemeinsame durch P verlaufende Komponente haben; $I(P, F \cap G) = \infty$ falls F und G eine gemeinsame durch P verlaufende Komponente haben.

(ii) $I(P, F \cap G) = 0$ genau dann, wenn $P \notin F \cap G$. $I(P, F \cap G)$ hängt nur von den durch P verlaufenden Komponenten von F und G ab. $I(P, F \cap G) = 0$ falls F oder G eine Konstante ungleich 0 ist.

(iii) Ist T ein projektiver Koordinatenwechsel auf $\mathbb{P}^2$ und $T(Q) = P$ für $Q \in \mathbb{P}^2$, dann gilt $I(P, F \cap G) = I(Q, F^T \cap G^T)$

(iv) $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$

(v) $I(P, F \cap G) \geq m_P(F) m_P(G)$ mit $I(P, F \cap G) = m_P(F) m_P(G)$ falls F und G keine gemeinsamen Tangenten in P haben.

(vi) Für $F = \prod_{i=1}^n F_i^{r_i}$, $G = \prod_{i=1}^m G_i^{s_i}$ mit $n, m, r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$I(P, F \cap G) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i s_j I(P, F_i \cap G_j)$$

(vii) $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF))$ für alle homogenen Polynome $A \in k[X_1, X_2, X_3]$ mit $\deg(A) = \deg(G) - \deg(F)$

(viii) Ist P ein einfacher Punkt auf F, so gilt $I(P, F \cap G) = \mathrm{ord}_P^F(G)$

Definition 2.10 (Tangenten an eine Kurve und gewöhnliche mehrfache Punkte)**.** Eine Gerade L heißt *Tangente* einer Kurve F im Punkt P, falls $I(P, F \cap L) > m_P(F)$. Ein Punkt P auf F heißt *gewöhnlicher mehrfacher Punkt* von F, falls F genau $m_P(F)$ verschiedene Tangenten in P hat.

Definition 2.11 (Projektiv äquivalent)**.** Zwei projektive Kurven F und G heißen *projektiv äquivalent*, falls es einen projektiven Koordinatenwechsel T gibt, sodass $F = G^T$.

3 Der Satz von Bézout

Lemma 3.1. *Der Schnitt zweier verschiedener, ebener, projektiver Kurven, die keine gemeinsame Komponente haben, besteht aus endlich vielen Punkten.*

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, dass für zwei verschiedene projektive eindimensionale Varietäten $U, V \subset \mathbb{P}^2$ jede Varietät $W \subseteq (U \cap V)$ nur aus einem Punkt besteht (Zerlegung in irreduzible Komponenten, von denen es aus Gradgründen nur endlich viele gibt). Ist $A_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq A_n$ eine Kette von nicht leeren abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von W so ist $A_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq A_n \subsetneqq U$ eine Kette von nicht leeren, abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen von U und es folgt $\dim(U) \geq \dim(W)+1$, also $\dim(W) \leq 0$ und somit die Behauptung. □

Lemma 3.2. *(i) Sei*

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\phi} V'' \longrightarrow 0$$

Eine exakte Sequenz endlichdimensonaler Vektorräume über einem Körper. Dann gilt $\dim(V') + \dim(V'') = \dim(V)$

(ii) Sei

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \xrightarrow{\phi_3} V_4 \longrightarrow 0$$

Eine exakte Sequenz endlichdimensonaler Vektorräume über einem Körper. Dann gilt $\dim(V_4) = \dim(V_3) - \dim(V_2) + \dim(V_1)$

Beweis. (i) Es ist:

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \dim(\mathrm{Im}(\phi)) + \dim(\ker(\phi)) \\ &= \dim(V'') + \dim(\mathrm{Im}(\psi)) \\ &= \dim(V'') + \dim(V')\end{aligned}$$

(ii) Sei $W := \mathrm{Im}(\phi_2) = \ker(\phi_3)$. Nun sind

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} W \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\phi_2} V_3 \xrightarrow{\phi_3} V_4 \longrightarrow 0$$

exakt und es gelten nach (i)

$$\begin{aligned}\dim(V_2) &= \dim(V_1) + \dim(W) \\ \dim(V_3) &= \dim(W) + \dim(V_4)\end{aligned}$$

also wie behauptet

$$\dim(V_4) = \dim(V_3) - \dim(V_2) + \dim(V_1)$$

□

Satz 3.3 (Der Satz von Bézout)**.** *Seien F und G zwei ebene, projektive Kurven vom Grad m und n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ohne gemeinsame Komponente. Dann gilt:*

$$\sum_P I(P, F \cap G) = mn$$

Beweis. Da $F \cap G$ endlich ist (Lemma 3.1), können wir annehmen, dass keiner der Punkte in $F \cap G$ auf der unendlich fernen Gerade $Z = 0$ liegt (siehe auch Lemma 4.8; gegebenenfalls nach projektivem Koordinatenwechsel). Nun gilt nach den Eigenschaften der Schnittzahl $\sum_P I(P, F \cap G) = \sum_P I(P, F_* \cap G_*) = \dim_k \left(k[X,Y] \big/ (F_*, G_*) \right)$. Seien

$$\Gamma_* := k[X,Y] \big/ (F_*, G_*) \quad \Gamma := k[X,Y,Z] \big/ (F,G) \quad R := k[X,Y,Z]$$

und sei R_d der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in R und Γ_d der Vektorraum der Elemente von Γ, die Restklassen von Elementen von R_d sind. Der Satz ist bewiesen wenn $\dim(\Gamma_*) = \dim(\Gamma_d)$ und $\dim(\Gamma_d) = mn$ für hinreichend großes d gezeigt wurde.
Schritt 1 für $d \geq m+n$ ist $\dim(\Gamma_d) = mn$: Sei $d \geq m+n$ und $\pi : R \to \Gamma$ die natürliche Projektion. Sei $\phi : R \times R \to R$ definiert durch $\phi(A,B) = AF + BG$ und sei $\psi : R \to R \times R$ gegeben durch $\psi(C) = (GC, -FC)$. Da F und G teilerfremd sind, ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} R \times R \xrightarrow{\phi} R \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 0$$

exakt. Durch Einschränken der Abbildungen auf homogene Polynome bestimmten Grades ergibt sich die folgende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R_{d-m-n} \xrightarrow{\psi} R_{d-m} \times R_{d-n} \xrightarrow{\phi} R_d \xrightarrow{\pi} \Gamma_d \longrightarrow 0$$

Mit $\dim(R_d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ folgt dann

$$\begin{aligned}
\dim(\Gamma_d) &= \dim(R_d) - \dim(R_{d-m} \times R_{d-n}) + \dim(R_{d-m-n}) \\
&= \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{(d-m+1)(d-m+2) + (d-n+1)(d-n+2)}{2} \\
&\qquad + \frac{(d-m-n+1)(d-m-n+2)}{2} \\
&= mn
\end{aligned}$$

Schritt 2 Die Abbildung $\alpha : \Gamma \to \Gamma, \overline{H} \mapsto \overline{ZH}$ (Für $H \in R$ bezeichne $\overline{H}$ bzw. $\overline{ZH}$ die Restklasse von H bzw. ZH in Γ) ist injektiv: Es ist zu zeigen, dass $ZH = AF + BG \Rightarrow H = A'F + B'G$ für gewisse A', B' gilt. Für $J \in k[X,Y,Z]$ sei $J_0 := J(X,Y,0)$. Da F, G und Z keine gemeinsamen Nullstellen haben, sind F_0 und G_0 teilerfremd in $k[X,Y]$. Ist nun $ZH = AF + BG$, so gilt $A_0F_0 = -B_0G_0$ und es lässt sich mit der Teilerfremdheit von F_0 und G_0 folgern, dass $B_0 = F_0C$ und $A_0 = -G_0C$ für gewisses $C \in k[X,Y]$. Seien $A_1 := A + CG$ und $B_1 := B - CF$. Wegen $(A_1)_0 = (B_1)_0 = 0$ gilt $A_1 = ZA'$ und $B_1 = ZB'$ für gewisse $A', B' \in k[X,Y,Z]$ und wegen $ZH = A_1F + B_1G$ folgt nun wie behauptet $H = A'F + B'G$.

Schritt 3 Sei $d \geq m+n$ und seien $A_1, \ldots, A_{mn} \in R_d$ so gewählt, dass die Restklassen der $A_i, i \in \{1, \ldots, mn\}$ eine Basis von Γ_d bilden (beachte Schritt 1). Sei $A_{i*} := A_i(X,Y,1) \in k[X,Y]$ und sei a_i die Restklasse von A_{i*} in Γ_*. Im Folgenden wird gezeigt, dass die a_i eine Basis von Γ_* bilden: Zunächst sei bemerkt, dass die Abbildung α aus Schritt 2 für $d \geq m+n$ nach Einschränkung ein Isomorphismus von Γ_d nach Γ_{d+1} ist, da injektive Homomorphismen zwischen Vektorräumen gleicher Dimension Isomorphismen sind. Die Restklassen von $Z^rA_1, \ldots, Z^rA_{mn}$ bilden also eine Basis von Γ_{d+r} für alle $r \geq 0$.
Die a_i erzeugen Γ_*: Sei $h = \overline{H} \in \Gamma_*, H \in k[X,Y]$. Es gibt nun ein Z^NH^* welches ein homogenes Polynom vom Grad $d+r$ ist, d.h. $Z^NH^* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i Z^r A_i + BF + CG$ für gewisse $\lambda_i \in k, B, C \in k[X,Y,Z]$. Dann ist $H = (Z^NH^*)_* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_{i*} + B_*F_* + C_*G_*$, also $h = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_i$.
Die a_i sind linear unabhängig: Sei $\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_i = 0$. Es ist:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_i = 0 && \text{in } \Gamma_* \\
\Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_{i*} = BF_* + CG_* && \text{in } k[X,Y] \\
\Rightarrow \quad & \left(\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_{i*} \right)^* = (BF_* + CG_*)^* && \text{in } k[X,Y,Z] \\
\Rightarrow \quad & \left(\left(\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_i \right)_* \right)^* = \left(\left(Z^{t_1}B^*F + Z^{t_2}C^*G \right)_* \right)^* && \text{für gewisse } t_1, t_2 \text{ sodass} \\
& && Z^{t_1}B^*F + Z^{t_2}C^*G \\
& && \text{homogen ist} \\
\Rightarrow \quad & Z^r \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_i = Z^sB^*F + Z^tC^*G && \text{für gewisse } r, s, t \\
\Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i \overline{Z^rA_i} = 0 && \text{in } \Gamma_{d+r}
\end{aligned}$$

und damit folgt $\lambda_i = 0$ für $i \in \{1, \ldots, mn\}$, denn die $\overline{Z^rA_i}, i \in \{1, \ldots, mn\}$ bilden wie oben bemerkt eine Basis.
Dies schließt den Beweis des Satzes ab. $\square$

Korollar 3.4. *Haben zwei ebene, projektive Kurven F und G keine gemeinsame*

Komponente, so gilt $\sum_P m_P(F) m_P(G) \leq \deg(F)\deg(G)$.

Korollar 3.5. *Schneiden sich zwei ebene, projektive Kurven F und G in mn verschiedenen Punkten, wobei $m = \deg(F), n = \deg(G)$, so sind alle diese Punkte einfache Punkte von F und G.*

Korollar 3.6. *Wenn zwei ebene, projektive Kurven von den Graden m und n mehr als mn gemeinsame Punkte haben, dann haben sie eine gemeinsame Komponente.*

4 Lineare Systeme von Kurven

Lemma 4.1 (Anzahl der Monome vom Grad d)**.** *Es gibt $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ Monome in X, Y, Z vom Grad d.*

Beweis. Es bezeichne $d_X(M)$ den Exponenten zu dem X, $d_Y(M)$ den Exponenten zu dem Y und $d_Z(M)$ den Exponenten zu dem Z im Monom M vorkommt. Es gibt nun $d+1$ Monome M vom Grad d mit $d_X(M) + d_Y(M) = d$. Für festes $d_X(M) \in \{0, \dots, d\}$ gibt es $d - d_X(M)$ Monome M vom Grad d, also insgesamt $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ Monome vom Grad d. Folgende Monomanordnung illustriert den Beweis:

$$\begin{array}{ccccccc}
X^dY^0Z^0 & X^{d-1}Y^1Z^0 & \dots & X^{d-n}Y^nZ^0 & \dots & X^0Y^dZ^0 \\
 & X^{d-1}Y^0Z^1 & \dots & X^{d-n}Y^{n-1}Z^1 & \dots & X^0Y^{d-1}Z^1 \\
 & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & X^{d-n}Y^0Z^n & \dots & X^0Y^{d-n}Z^n \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & X^0Y^0Z^d
\end{array}$$

□

Bemerkung 4.2 (Identifikation von ebenen, projektiven Kurven mit Punkten in einem projektiven Raum). Wir betrachten im Folgenden alle ebenen, projektiven Kurven vom Grad d. Sei $M_1, \dots, M_N$ eine feste Ordnung auf der Menge der Monome in X, Y, Z vom Grad d wobei $N = \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ (Lemma 4.1). Das Vorgeben einer ebenen projektiven Kurve vom Grad d entspricht dem Wählen von $(a_1, \dots, a_N) \in k^N$ nicht alle gleich 0 via $F = \sum_{i=1}^N a_i M_i$ wobei aber zu beachten ist, dass $(a_1, \dots, a_N)$ und $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_N)$ für $\lambda \in k^\times$ zum selben F führen. Mit anderen Worten korrespondiert also jede ebene projektive Kurve vom Grad d zu einem Punkt in $\mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}^{\frac{d}{2}(d+3)}$. Die ebenen, projektiven Kurven vom Grad d formen in dieser Weise einen projektiven Raum der Dimenion $\frac{d}{2}(d+3)$.

Definition 4.3 (Lineares System ebener Kurven)**.** Wir identifizieren die ebenen Kurven vom Grad d mit ihren zugehörigen Punkten in $\mathbb{P}^{\frac{d}{2}(d+3)}$. Für homogene Polynome $H_1, \dots, H_r \in k[X_1, \dots, X_{\frac{d}{2}(d+3)}]$ vom Grad 1 heißen die Polynome, die zu den Punkten in $V(H_1, \dots, H_r)$ korrespondieren *Lineares System ebener Kurven*

Lemma 4.4. *(i) Sei $P \in \mathbb{P}^2$. Die Menge der ebenen projektiven Kurven vom Grad d, die durch P verlaufen, bilden eine Hyperebene in $\mathbb{P}^{\frac{d}{2}(d+3)}$*

(ii) Ist $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ ein projektiver Koordinatenwechsel, so definiert die Abbildung

$$T' : \left\{ \begin{array}{l} \textit{Menge der ebenen} \\ \textit{projektiven Kurven} \\ \textit{vom Grad } d \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{l} \textit{Menge der ebenen} \\ \textit{projektiven Kurven} \\ \textit{vom Grad } d \end{array} \right\}$$

$$F \mapsto F^T$$

einen projektiven Koordinatenwechsel auf $\mathbb{P}^{\frac{d}{2}(d+3)}$.

Beweis. (i) Für $P = (x : y : z)$ verläuft die zu $(a_1 : \ldots : a_N) \in \mathbb{P}^N$ mit $N = \frac{d}{2}(d+3)$ korrespondierende Kurve genau dann durch P, wenn gilt $\sum_{i=1}^N a_i M_i(x,y,z) = 0$ wobei $M_1, \ldots, M_N$ eine festgelegte Ordnung der Monome vom Grad d in $k[X,Y,Z]$ sei. Es ist also $(a_1, \ldots, a_N) \in V(\sum_{i=1}^N M_i(x,y,z)X_i)$. Diese Punkte $(a_1 : \ldots : a_N)$ bilden eine Hyperebene da nicht alle $M_i(x,y,z)$ gleich 0 sind.

(ii) Sei T gegeben durch

$$T((x:y:z)) = (b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z : b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z : b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z)$$

mit $b_{ij} \in k$ für $i,j \in \{1,2,3\}$ und sei $(a_1, \ldots, a_N)$ der zu F korrespondierende Punkt, also $F = \sum_{i=1}^N a_i M_i$. Sei weiterhin e_{iX} der zu X, e_{iY} der zu Y und e_{iZ} der zu Z gehörige Exponent im Monom M_i für $i \in \{1, \ldots, N\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&F^T \\
&= \sum_{i=1}^N a_i M_i^T \\
&= \sum_{i=1}^N a_i (X^T)^{e_{iX}} (Y^T)^{e_{iY}} (Z^T)^{e_{iZ}} \\
&= \sum_{i=1}^N a_i (b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z)^{e_{iX}} (b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z)^{e_{iY}} \\
&\qquad\quad (b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z)^{e_{iZ}} \\
&= \sum_{i=1}^N \left(a_i \sum_{j=1}^N b'_{ij} M_j \right) \quad \text{für gewisse} \quad b'_{ij} \in k \quad \text{wobei} \quad i,j \in \{1, \ldots, N\} \\
&= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N a_i b'_{ij} \right) M_j
\end{aligned}$$

T' bildet also $(a_1 : \ldots : a_N)$ auf $(\sum_{i=1}^N a_i b'_{i1} : \ldots : \sum_{i=1}^N a_i b'_{iN})$ ab. Außerdem ist die durch T' gegebene Abbildung invertierbar, da T invertierbar ist. Dies zeigt die Behauptung.

$\square$

Lemma 4.5. *Der Schnitt von n Hyperebenen in $\mathbb{P}^n$ ist nicht leer.*

Beweis. Seien $H_1, \ldots, H_n \subseteq \mathbb{P}^n$ Hyperebenen. Sei

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ji} X_i \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$$

das H_j definierende Polynom für $j \in \{1, \ldots, n\}$. Um zu zeigen, dass $\bigcap_{i=1}^n H_i \neq \emptyset$ genügt es offenbar zu zeigen, dass es ein $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in k^{n+1}$ gibt mit $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ji} \lambda x_i = 0$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebiges $\lambda \in k^\times$. Da die $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ji} X_i$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ homogen sind genügt es bereits zu zeigen, dass

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nicht triviale Lösung für $X_1, \ldots, X_{n+1}$ besitzt. Da aber der Rang der oben betrachteten Matrix kleiner als die Zahl der Unbekannten ist und es sich um die Repräsentation eines homogenen Gleichungssystems handelt, gibt es nichttriviale Lösungen. $\square$

Korollar 4.6. *Aus Lemma 4.4 und Lemma 4.5 folgt, dass es zu $\frac{d}{2}(d+3)$ Punkten in $\mathbb{P}^2$ stets eine durch diese verlaufende ebene projektive Kurve vom Grad $\leq d$ gibt.*

Lemma 4.7. *Sei $P = (0 : 0 : 1)$ und F eine ebene projektive Kurve vom Grad d mit $F = \sum_{i=1}^n F_i(X, Y) Z^{d-i}$ wobei F_i für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein homogenes Polynom vom Grad i bezeichne. $m_P(F)$ ist das kleinste m mit $F_m \neq 0$.*

Beweis. Nach Definition der Vielfachheit gilt $m_P(F) = m_P(F_*)$ wobei F_* die Dehomogenisierung von F nach Z bezeichne. Es ist also

$$m_P(F) = m_P(\sum_{i=1}^n F_i(X, Y))$$

und so folgt nach Definition der Vielfachheit im Affinen die Behauptung. $\square$

Lemma 4.8. *Seien $P, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2$. Es gibt unendlich viele Geraden, die durch P aber nicht durch $P_1, \ldots, P_n$ verlaufen.*

Beweis. Die Menge aller durch einen Punkt $Q \in \mathbb{P}^2$ verlaufenden Geraden werde als Hyperebene H_Q in $\mathbb{P}^2$ aufgefasst. Es ist nun zu zeigen, dass gilt: $H_P \cap (H_{P_1} \cup \ldots \cup H_{P_n})^c \neq \emptyset$. Dies gilt genau dann, wenn $(H_P \cap H_{P_1}) \cup \ldots \cup (H_P \cap H_{P_n}) \neq H_P$.

Die Aussage $(H_P \cap H_{P_1}) \cup \ldots \cup (H_P \cap H_{P_n}) = H_P$ liefert aber wegen $H_P \neq H_{P_i}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ einen Widerspruch zur Irreduziebilität von H_P. Dies zeigt die Behauptung, denn $H_P \cap (H_{P_1} \cup \ldots \cup H_{P_n})^c \neq \emptyset$ ist offen in H_P und endliche Mengen in H_P sind abgeschlossen. □

Satz 4.9. *(i)*

$$V(d; r_1P_1, \ldots, r_nP_n) := \{\textit{Kurven vom Grad}\, d \,|\, m_{P_i}(F) \geq r_i, 1 \leq i \leq n\}$$

ist eine lineare Untervarietät von $\mathbb{P}^{\frac{d}{2}(d+3)}$ *mit Dimension* $\geq \frac{d}{2}(d+3) - \sum_{i=1}^n \frac{r_i(r_i+1)}{2}$

(ii) $d \geq (\sum_{i=1}^n r_i) - 1 \Rightarrow \dim(V(d; r_1P_1, \ldots, r_nP_n)) = \frac{d}{2}(d+3) - \sum_{i=1}^n \frac{r_i(r_i+1)}{2}$

Beweis. (i) Für einen festen Punkt P und eine ganze Zahl $r \leq d+1$ bilden die Kurven vom Grad d mit $m_P(F) \geq r$ eine lineare Untervarietät, welche Schnitt von $\frac{d}{2}(d+3) - \frac{r(r+1)}{2}$ Hyperebenen ist: Nach Lemma 4.4 (ii) können wir ohne Einschränkung $P = (0:0:1)$ annehmen. Schreibe $F = \sum_{i=1}^N a_i M_i$, wobei $M_1, \ldots, M_N$ wieder eine feste Ordnung der Monome in $k[X,Y,Z]$ vom Grad d sei und $a_1, \ldots, a_N \in k$. Sei $M_i = X^{e_{Xi}} Y^{e_{Yi}} Z^{e_{Zi}}$ für $i \in 1, \ldots, N$. Wegen Lemma 4.7 folgt aus $m_P(F) \geq r$ die Bedingung $a_i = 0$ falls $e_{Xi} + e_{Yi} < r$. Es gibt $1 + 2 + \ldots + r = \frac{r(r+1)}{2}$ solche Monome, also folgt die Zwischenbehauptung.

Für den Schnitt S von k paarweise verschiedenen Hyperebenen in $\mathbb{P}^n$ gilt $\dim(S) = n-k$: Das Verschwindungsideal des Schnittes S wird von k paarweise verschiedenen, linearen Polynomen in $k[X_0, \ldots, X_n]$ erzeugt. Seien diese $P_1, \ldots, P_k$. $(\alpha_0 : \ldots : \alpha_n) \in S$ gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} P_1(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) &= 0 \\ &\vdots \\ P_k(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem mit k Gleichungen und $n+1$ Unbekannten, es gibt also einen $n+1-k$ dimensionalen Lösungsraum. Nach geeignetem projektivem Koordinatenwechsel gilt dann also $S = V(X_{n-k+1}, \ldots, X_n)$ und somit die Behauptung.

(ii) Sei $m := (\sum_{i=1}^n r_i) - 1$. Für $d = 1$ oder $m = 1$ ist die Aussage trivial. Im folgenden gelte also $m > 1, d > 1$. Zudem werde zunächst der Fall $r_1 = \ldots = r_n = 1$ betrachtet. Sei $V_i = V(d; P_1, \ldots, P_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Induktion genügt es $V_n \neq V_{n-1}$ zu zeigen (Dimension einer Varietät ist ihre Dimension als topologischer Raum). Seien Geraden L_i so gewählt (Dies ist möglich nach Lemma 4.8), dass $P_i \in L_j$ für $i = j$ und $P_i \notin L_j$ für $i \neq j$ gilt $(i, j \in \{1, \ldots, n-1\})$. Sei zudem eine Gerade L_0 gewählt, die durch keinen der $P_1, \dots, P_n$ geht. Definiere $F := L_1 \cdot \ldots \cdot L_{n-1} L_0^{d-n+1}$ (Beachte $d \geq (\sum_{i=1}^n r_i) - 1$). Es ist nun $F \in V_{n-1}$ aber $F \notin V_n$, also $V_n \neq V_{n-1}$.

Sei nun mindestens ein $r_i > 1$. Sei ohne Einschränkung $r := r_1 > 1$ und $P := P_1 = (0 : 0 : 1)$ (gegebenenfalls nach projektivem Koordinatenwechsel). Sei $V_0 := V(d; (r-1)P, r_2 P_2, \dots, r_n P_n)$. Für $F \in V_0$ sei $F_* = F(X, Y, 1) = \left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i X^i Y^{r-1-i}\right) +$ Terme höherer Ordnung. Sei $V_i := \{F \in V_0 \,|\, a_j = 0 \, \text{für}\, j < i\}$. Dann gilt $V_0 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_r = V(d; r_1 P_1, \dots, r_n P_n)$. Es genügt also $V_i \neq V_{i+1}$ für $i \in \{0, \dots, r-1\}$ zu zeigen, denn dann folgt $\dim(V(d; r_1 P_1, \dots, r_n P_n)) = \dim(V_0) - r$ und damit induktiv die Behauptung.

Sei $W_0 := V(d-1; (r-2)P, r_2 P_2, \dots, r_n P_n)$ (Beachte $d \geq (\sum_{i=1}^n r_i) - 1$). Für $F \in W_0$ sei wieder $F_* := F(X, Y, 1) = a_i X^i Y^{r-2-i} + \ldots$. Setze $W_i := \{F \in W_0 \,|\, a_j = 0 \, \text{für}\, j < i\}$. Nach Induktion gilt $W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \ldots \supsetneq W_{r-1} = V(d-1; (r-1)P, r_2 P_2, \dots, r_n P_n)$. Gilt $F_i \in W_i, F_i \notin W_{i+1}$, dann gilt $YF_i \in V_i, YF_i \notin V_{i+1}$ und $XF_{r-2} \in V_{r-1}, XF_{r-2} \notin V_r$ also $V_i \neq V_{i+1}$ für $i \in \{0, \dots, r-1\}$.

$\square$

5 Literatur

[Fu] William Fulton. Algebraic Curves. An Introduction to algebraic geometry
`http://www.math.lsa.umich.edu/ wfulton/CurveBook.pdf`