Universität Heidelberg 28. Oktober 2014

Seminar

Einführung in die Theorie der algebraischen Kurven

Vortrag 1: Schnittzahlen affiner Kurven

Moritz Schönwandt

Vielfachheiten von Punkten

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.
In dem Vortrag soll die Schnittzahl affiner Kurven definiert werden. Dazu betrachten wir zunächst die Vielfachheit von Punkten auf einer einzelnen Kurve.

Definition 1 (Affine ebene Kurve). a) Zwei Polynome $F, G \in k[X, Y]$ heißen *äquivalent* (schreibe $F \sim G$), wenn wenn es ein Skalar $\lambda \in k^\times$ gibt mit $F = \lambda G$.

b) Ein Element aus $k[X, Y]_{/\sim}$, welches nicht die Restklasse der konstanten Polynome ist, heißt *affine ebene Kurve*.

Bemerkung 2. • Wir identifizieren eine affine ebene Kurve mit einem (beliebigen) Polynom welches die Restklasse repräsentiert.

- Die irreduziblen Komponenten von einem Polynom F (mit entsprechenden Vielfachheiten) sind die irreduziblen Komponenten der affinen ebenen Kurve (mit den entsprechenden Vielfachheiten)

Definition 3 (einfacher Punkt und Tangenten). Sei $F \in k[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom (eine irreduzible ebene Kurve).

a) Ein Punkt $P \in F$ ($P \in Z((F))$) heißt *einfach*, wenn $\frac{dF}{dX}(P) \neq 0$ oder $\frac{dF}{dY}(P) \neq 0$, wobei $\frac{dF}{dX}$ bzw. $\frac{dF}{dY}$ die formale Ableitung nach X bzw. Y bezeichnen.

b) Ist $P = (a, b)$ ein einfacher Punkt von F, dann ist $\frac{dF}{dX}(P)(X - a) + \frac{dF}{dY}(P)(Y - b)$ die *Tangente* von F in P.

Bemerkung 4. Eine affine ebene Kurve mit nur einfachen Punkten heißt *nicht-singuläre Kurve*.

Diese anschauliche Definition ermöglicht nur, einfache von mehrfachen Punkten zu unterscheiden. Eine genaue Vielfachheit liefert folgende Definition.

Definition 5 (Vielfachheiten von Punkten). Sei $F \in k[X, Y]$ ein beliebiges, nicht konstantens Polynom (eine affine ebene Kurve).

a) Schreibe $F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n$ mit $F_i \in k[X_Y]$ homogen vom Grad i und $F_m \neq 0 \neq F_n$. Dann ist m die Vielfachheit $m_P(F)$ von F im Punkt $P = (0, 0)$.

b) Sei F_m wie in a) und $F_m = \prod_i L_i^{r_i}$ mit L_i homogen vom Grad 1 und paarweise verschieden. Dann sind die L_i die Tangenten an F in $P = (0,0)$.

Bemerkung 6.

- Die in der Definition benutzen Zerlegungen existieren immer und sind eindeutig. Für die Zerlegung in b) siehe auch (Fulton, 1969, §2.6 Corollary).
- Die Definitionen erweitern sich auf beliebige Punkte durch Translation.
- Die Definition ist im Fall $m = 1$ mit der Definition für einen einfachen Punkt äquivalent.
- Es gilt $P \in F \Leftrightarrow m_P(F) > 0$

Wie in der Definition bereit geschehen, ist es häufig sinnvoll sich auf leichte Fälle wie $P = (0,0)$ zu beschränken. Etwas allgemeiner und formaler haben wir den Begriff eines *Affinen Koordinatenwechsels*.

Affiner Koordinatenwechsel

Definition 7. Eine Abbildung $T : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^n$ heißt affiner Koordinatenwechsel, wenn T bijektiv und in jeder Komponente durch ein Polynom vom Totalgrad 1 gegeben ist.

Bemerkung 8.

- Ein affiner Koordinatenwechsel besteht aus einer Translation und einer linearen Abbildung $(T_i = \sum a_{ij} X_j)$ und ist somit durch einen anderen affinen Koordinatenwechsel umkehrbar (LA1).
- Ein solcher Koordinatenwechsel induziert eine Abbildung auf den Koordinatenringen von algebraischen Mengen. Das Bild eines Polynoms $F \in k[X,Y]$ wird mit F^T bezeichnet.
- Für Varietäten induziert T einen Isomorphismus auf den lokalen Ringen.

Diskrete Bewertungsringe

Um die Schnittzahlen zu defineren, wollen wir uns die Eigenschaften der lokalen Ringe aus der Varietätentheorie zu Nutze machen. Daher zunächst eine kleine Einführung in *diskrete Bewertungsringe*.

Definition 9 (Diskreter Bewertungsring)**.** Ein Integritätsbereich R, der kein Körper ist heißt *diskreter Bewertngsring* (DBR, engl. DVR), wenn R noethersch und lokal ist und das maximale Ideal ein Hauptideal. Ein Erzeuger des maximalen Ideals heißt *uniformisierendes Element*.

Proposition 10. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal und k der zugehörige Restklassenkörper. Sei t ein uniformisierendes Element. Dann gilt*

a) Für alle $z \in R$ gibt es genau eine Darstellung $z = ut^n$ für $u \in R^\times$ und $n \in \mathbb{N}_0$

b) Die Zuordnung $z \mapsto \sup\{n \in \mathbb{N}_0 | z \in \mathfrak{m}^n\}$ definiert eine Bewertung $\mathrm{ord} : R \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit

i) $\mathrm{ord}(z) = \infty \Leftrightarrow z = 0$

ii) $\mathrm{ord}(xz) = \mathrm{ord}(x) + \mathrm{ord}(z)$

iii) $\mathrm{ord}(x+z) \geq \min(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(z))$

c) Es gilt $\dim_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ord}(z) = \dim_k R/(z)$ für alle $z \in R$.

Bemerkung 11.

- Die in der Proposition unter $a)$ und $b)$ genannten Eigenschaften sind charkterisierend, d.h. sie ermöglichen eine äquivalente Definition einen diskreten Bewertungsrings.
- Die Bewertung ord lässt sich auf den Quotientenkörper von R fortsetzen mit

$$\text{ord}(1/z) := -\text{ord}(z).$$

Dann gilt für $x \in \text{Quot}(R)$

$$x \in R \Leftrightarrow \text{ord}(x) \geq 0$$
$$x \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow \text{ord}(x) > 0$$

Charakterisierung durch lokale Ringe

Sei k ein algebraisch abgeschlossenener Körper.
Für ein Primideal $I \subset k[X1, \dots, X_n]$ ist $V = Z(I) \subset \mathbb{A}_k^2$ eine affine Varietät. Wir erinnern uns an einige Begriffe aus der algebraischen Geometrie:

$$A(V) = K[X, Y]/I \text{ der affine Koordinatenring}$$
$$K(V) = \text{Quot}(A(V)) \text{ der Funktionenkörper}$$
$$\mathcal{O}_P(V) = \{x \in K(V) | \exists f, g \in A(V), g(P) \neq 0 : f/g = x\} \text{ der lokale Ring an } P \in V$$
$$\mathfrak{m}_P(V) = \{x \in K(V) | \exists f, g \in A(V), g(P) \neq 0, f(P) = 0 : f/g = x\} \text{ das maximale Ideal von } \mathcal{O}_P(V)$$

Proposition 12. *Sei $I \subset k[X1, \dots, X_n]$ ein Ideal mit $Z(I) = \{P_1, \dots P_N\}$ endlich. Setze $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{P_i}(\mathbb{A}_k^n)$. Dann gilt*

$$k[X_1, \dots, X_n]/I \cong \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i / I\mathcal{O}_i$$

Beweis. Siehe (Fulton, 1969, §2.9 Proposition 6)

Korollar 13.

$$\dim_k(k[X_1, \dots, X_n]/I) = \sum_{i=1}^{N} \dim_k(\mathcal{O}_i / I\mathcal{O}_i)$$

Korollar 14. *Wenn $Z(I) = P$ dann ist $k[X_1, \dots, X_n]/I \cong \mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^n)/I\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^n)$*

Theorem 15. *Sei $F \in k[X, Y]$ eine irreduzibles Polynom (eine irreduzible Kurve) und $P \in F$. Dann gilt:*

$$m_P(F) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{O}_P(F) \text{ ist ein diskreter Bewertungsring}$$

In diesem Fall ist die Restklasse jeder Geraden L durch P, die keine Tangente an F ist, ein uniformisierendes Element.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Es gilt $m_P(F) = 1$ und somit gibt es eine eindeutige Tangente L'. Sei L eine Gerade durch P mit $L \neq L'$. Aus LA1 wissen wir, dass es einen affinen Koordinatenwechsel T gibt mit $T(P) = (0, 0), T(L) = X$ und $T(L') = Y$. Die Vielfachheit ändert sich unter affinen Koordinatenwechseln nach Definition nicht und da die lokalen Ringe zueinander isomproph sind können wir ohne Einschränkung $P = (0, 0), L = X$ und $L' = Y$ annehmen.

Da Y die Tangente ist, können wir schreiben $F = Y + F'$ mit $F' \in (X^2, XY, Y^2)$. Weiterhin lässt sich F' zerlegen in $F' = YG - X^2H$ mit $G \in (X, Y)$ und $H \in k[X]$. Wenn wir die Restklassen der Polynome in $A(V)$ mit Kleinbuchstaben bezeichnen gilt $(1+g) \in \mathcal{O}_P(V)^\times$, denn $(1+G)(P) \neq 0$. Es folgt mit $f = 0 \in \mathcal{O}_P(V)$

$$y = x^2h(1+g)^{-1}$$

Und somit $\mathfrak{m}_P(F) = (x, y) = (x)$, was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$" Folgt aus dem nächsten Theorem.

$\square$

Bemerkung 16. Wenn P ein einfacher Punkt ist $(m_P(F) = 1)$ und L eine Gerade durch P. Dann gilt:

$$L \text{ ist Tangente an } F \Leftrightarrow \text{ord}_{\mathcal{O}_P(F)}(L) > .1$$

Theorem 17. *Sei $F \in k[X, Y]$ eine irreduzibles Polynom (eine irreduzible Kurve) und $P \in F$. Dann gilt*

$$m_P(F) = \text{dim}_k(\mathfrak{m}_P(F)^n/\mathfrak{m}_P(F)^{n+1},$$

für $n > m_P(F)$.

Beweis. Wie im Beweis von Theorem 1 können wir uns auf dem Fall $P = (0, 0)$ beschränken. Setze $\mathcal{O} := \mathcal{O}_P(F), m = m_P(F)$ und $I := \mathfrak{m} := \mathfrak{m}_P(F) = (X, Y)$.
Betrachte folgende exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \hookrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \to 0.$$

Somit gilt

$$\text{dim}_k(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = \text{dim}_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1}) - \text{dim}_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n).$$

Wir wollen also $\text{dim}_k(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$ für jedes $n > m$ bestimmen. Dazu betrachten wir folgende Isomorphien:

$$k[X, Y]/(I^n, F) \cong \mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2_k)/(I^n, F)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}^2_k) \cong \mathcal{O}_P(F)/I\mathcal{O}_P(F) = \mathcal{O}/\mathfrak{m},$$

wobei die erste Isomorphie sich aus Korollar 14 folgt, da $Z(I^n, F) = \{P\}$ gilt. Die zweite Isomorphie ergibt sich einfach beim Übergang zu den Restklassen. Somit wollen wir $\text{dim}_k[X, Y]/(I^n, F)$ für jedes $n > m$ bestimmen. Die Abbildung $\psi : k[X, Y] \to k[X, Y], G \mapsto FG$ induziert folgende exakte Sequenz:

$$0 \to k[X, Y]/I^{n-m} \overset{\psi}{\hookrightarrow} k[X, Y]/I^n \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} k[X, Y]/(I^n, F) \to 0,$$

wobei π die kanonische Projektion ist.

Exaktheit links: Da $F \in I^m$ gilt: $G \in I^{n-m} \Rightarrow FG \in I^n$. Und eine Zerlegung von F und G in homogene Polynome zeigt, da F keine homogenen Teile von Grad $< m$ hat und $k[X, Y]$ ein Integriätsbereich ist, dass die homogenen Anteile von G vom Grad $< n - m$ verschwinden müssen.

$\pi \circ \psi = 0$: $\pi(F) = 0$

Exaktheit mitte: Elemente aus dem Kern von π sind Vielfache von F.

Exaktheit rechts: Die kanonische Projektion ist surjektiv.

Somit gilt

$$\text{dim}_k(k[X,Y]/(I^n, F)) = \text{dim}_k(k[X,Y]/I^n) - \text{dim}_k(k[X,Y]/I^{n-m})$$

und es reicht $\text{dim}_k(k[X,Y]/I^n)$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen. Die Menge der Restklassen von

$$\{1, X, Y, X^2, XY, Y^2, X^3, X^2Y, \ldots, Y^{n-1}\}$$

bilden offensichtlich eine Basis, somit ist

$$\text{dim}_k(k[X,Y]/I^n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alles zusammen ergibt ($\text{dim} = \text{dim}_k$)

$$\begin{aligned}
\text{dim}(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) &= \text{dim}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^{n+1}) - \text{dim}(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n) \\
&= \text{dim}\, k[X,Y]/I^{n+1} - \text{dim}\, k[X,Y]/I^{n+1-m} - \text{dim}\, k[X,Y]/I^n + \text{dim}\, k[X,Y]/I^{n-m} \\
&= \frac{1}{2}\left((n+1)(n+2) - (n+2-m)(n+1-m) - (n+1)n + (n-m+1)(n-m)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((n+1)2 + (n-m+1)(-2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2n + 2 - 2n + 2m - 2)\right) \\
&= m
\end{aligned}$$

□

Definition der Schnittzahl

Nun zur Definition der Schnittzahl.
Zu $F, G \in k[X,Y]$ und $P \in \mathbb{A}_k^2$ suchen wir eine Zahl $I(P, F \cap G) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften.

(1) $I(P, F \cap G) = \infty \Leftrightarrow F$ und G haben eine gemeinsame Komponente.

(2) $I(P, F \cap G) = 0 \Leftrightarrow P \notin F \cap G$

(3) $I(P, F \cap G) = I(Q, F^T \cap G^T)$ für jeden affinen Koordinatenwechsel T.

(4) $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$

(5) $I(P, F \cap G) \geq m_P(F) m_P(G)$ mit Gleichheit genau dann wenn F und G keine gemeinsamen Tangenten in P haben.

(6) $I(P, F \cap GH) = I(P, F \cap G) + I(P, F \cap H)$

(7) $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF))$ für beliebiges $A \in k[X,Y]$.

Theorem 18. *Die Schnittzahl $I(P, F \cap G)$ existiert und ist eindeutig für alle $F, G \in k[X,Y]$ und $P \in \mathbb{A}_k^2$. Es gilt*

$$I(P, F \cap G) = \text{dim}_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(F,G)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit.

Eindeutigkeit: Seien $F, G \in k[X,Y]\backslash\{0\}$ und sei $P \in \mathbb{A}_k^2$. Wenn F und G eine gemeinsame Komponente haben, oder P gar kein Schnittpunkt ist ($P \notin F \cap G$). So ist $I(P, F \cap G)$ eindeutig durch die Regeln (1) und (2) bestimmt. Und weiterhin können wir reicht es die Eindeutigkeit für den Fall $P = (0,0)$ zu zeigen. Denn ist dies gezeigt, so liefert (3) die Eindeutigkeit für alle Punkte. Sei also ohne Einschränkung $P = (0,0)$ Wir zeigen die Eindeutigkeit durch Induktion über $n = I(P, F \cap G)$

Induktionsanfang n=0: liefert (2)

Induktionsschritt: Setze $r = \deg F(X,0)$ und $s = \deg G(X,0)$. Œ$r \leq s$ (4)

Fall 1 $r = 0$: Dann teilt Y F, also gilt $F = YH$ für ein $H \in k[X,Y]$ und mit (6)

$$I(P, F \cap G) = I(P, H \cap G) + I(P, Y \cap G).$$

Nun ist $P \in Y \cap G$, daher ist $I(P, Y \cap G) \geq 1$ und somit $I(P, H \cap G)$ nach Induktionvorausetzung eindeutig bestimmt. Es reicht nun die Eindeutigkeit von $I(P, Y \cap G)$ zu zeigen. Schreibe dazu $G = X^m(a_0 + a_1X + \dots)$ mit $a_0 \neq 0$ mit einem eindeutigen m. Dann gilt

$$I(P, Y \cap G) \overset{(6)}{=} I(P, Y \cap X^m) + I(P, Y \cap a_0 + a_1X + \dots) \overset{(2)}{=} I(P, Y \cap X^m) = m$$

da X^m und Y keine gemeinsamen Tangenten in P haben. Diese Berechnung ist eindeutig!

Fall 2 $r > 0$: Da $I(P, \lambda \cap F) = 0$ für alle $\lambda \in k^\times$ nach (2) können wir mit (6) auch λF statt F betrachten. Seien nun F und G so skaliert, dass $F(X,0)$ und $G(X,0)$ normiert sind. Dann ist für $H = G - X^{r-s}F$ $I(P, F \cap G) = I(P, F \cap H)$ nach (7) und $\deg H(X,0) < s$. Setze diese Verfahren nun wiederholt an bis Fall 1 eintritt. Da der Grad eines Polynoms eine natürliche Zahl ist, muss das Verfahren in endlich vielen Schritten terminieren. Somit ist die Eindeutigkeit der Schnittzahl bewiesen.

Existenz Setze $I(P, F \cap G) = \dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(F,G))$. Wir müssen nun die Axiome (1) bis (7) nachweisen. Die Operationen in (4) und (7) verändern das Ideal und somit die Dimension nicht. Daher sind diese beiden Axiome erfüllt. Auch sind beide Seite invariant unter affinen Koordinatenwechseln, daher ist (3) erfüllt und wir können wieder ohne Einschränkung $P = (0,0)$ annehmen.

zu (1) „⇒“Sei H eine gemeinsame Komponente, dann ist $(F,G) \subset (H)$ und somit

$$\begin{aligned}\dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(F,H)) &\geq \dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(H)) = \dim_k(\mathcal{O}_P(H)) \\ &\geq \dim_k(A(H)) = \dim_k(k[X,Y]/(H)) = \infty\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus #$Z(H) = \infty$, denn zu beliebigen festen Punkten $P_1, \dots, P_r$ lassen sich r linearunabhängige Polynome $F_1, \dots, F_r$ finden. (Wähle F_i mit $F_i(P_j) = \delta_{ij}$)

„⇐“Wenn F und G keine gemeinsame Komponente haben, dann ist #$Z((F,G)) < \infty$. Und aus Korollar 13 folgt die Endlichkeit von $\dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2))$.

zu (2)„⇒“Ist $I(P, F \cap G) = 0$, so gibt es $A, B \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)$ mit $AF + BG = 1$ Also ist $P \notin F \cap G$.

„⇐“Wenn $P \notin F \cap G$, dann ist $F(P) \neq 0$ oder $G(P) \neq 0$. Und somit F oder $G \in \mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)^\times$, also $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(F,H) = 0$.

zu (6) Nach (1) können wir annehmen, dass F und GH keine gemeinsamen Komponenten haben. In diesem Fall wären beide Seiten der Gleichung ∞. Setze $\mathcal{O} := \mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)$ und betrachte die durch $\psi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}, A \mapsto AG$ induzierte Abbildung in folgender Sequenz.

$$0 \to \mathcal{O}/(F,H) \overset{\bar{\psi}}{\hookrightarrow} \mathcal{O}/(F,GH) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}/(F,G) \to 0$$

Wir zeigen, dass diese Sequenz wohldefiniert und exakt ist, wobei π die kanonische Projektion bezeichnet. Dann folgt das Axiom (6) aus der Dimensionsformel.

$\bar{\psi}$ wohldefiniert: $\bar{\psi}((F,G)) \subset (F,GH)$✓

$\pi \circ \bar{\psi} = 0 :$ ✓

Exaktheit links: Sei $a \in \mathcal{O}/(F,H)$ mit $\bar{\psi}(a) = 0$. Dann gibt es $u, v \in \mathcal{O}$ mit $Ga = uF + vGH$. Wähle $S \in K[X,Y]$ mit $S(P) \neq 0$ und mit $U := Su, V := Sv$ und $A := Sa$ alle in $k[X,Y]$ (Multiplikation mit den Nennern) . Dann gilt $G(A - VH) = UF \in k[X,Y]$ und da F und G teilerfremd sind, ist $A - VH = FD$ für ein $D \in k[X,Y]$. Dies führt zu $a = \frac{DF}{S} + \frac{BH}{S} \in (F,H)\mathcal{O}$.

Exaktheit mitte: Elemente aus dem Kern von π sind Vielfache von G✓

Exaktheit rechts: Die kanonische Projektion ist surjektiv.

zu (5) Wie in dem Beweis, dass (6) gilt, können wir annehmen, dass F und G keine gemeinsamen Komponenten haben. Und nach (1) können wir annehmen, dass P wirklich ein Schnittpunkt ist, sonst ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Setze $\mathcal{O} := \mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)$, $m := m_P(F)$, $n := m_P(G)$ und $I := (X,Y) = \mathfrak{m}_P(\mathbb{A}_k^2)$. Somit haben wir $F \in I^m$ und $G \in I^n$. Betrachte die beiden exakten Sequenzen.

$$k[X,Y]/I^n \times k[X,Y]/I^m \overset{\varphi}{\to} k[X,Y]/I^{m+n} \twoheadrightarrow k[X,Y]/(I^{n+m}, F, G) \to 0$$

und

$$\mathcal{O}/(F,G) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}/(I^{n+m}, F, G) \to 0.$$

Die jeweils letzten beiden (von null verschiedenen) Vektorräume sind nach Korollar 14 isomorph, denn $Z(I^{n+m}, F, G) = \{P\}$ Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
I(P, F \cap G) &= \dim_k(\mathcal{O}/(F,G) \\
&\geq \dim_k(\mathcal{O}/(I^{n+m}, F, G)) = \dim_k[X,Y]/(I^{n+m}, F, G) \\
&\geq \dim_k[X,Y]/I^{n+m} - \dim_k[X,Y]/I^n - \dim_k[X,Y]/I^m \\
&= \frac{1}{2}\left((n+m+1)(n+m) - (n+1)n - (m+1)m\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + m^2 + 2nm + n + m - n^2 - n - m^2 - m\right) = nm
\end{aligned}$$

Mit Gleichheit genau dann wenn φ und π injektiv sind. Somit folgt Axiom (5) als folgendem Lemma.

□

Lemma 19. *Mit Bezeichnungen wie im Beweis von vorherigem Theorem gilt.*

(i) Wenn F und G keine gemeinsamen Tangenten an P haben, so gilt $I^t \subset (F,G)\mathcal{O}$ für alle $t \geq m + n - 1$. Insbesondere ist π ein Iso.

(ii) F und G haben genau dann keine gemeinsamen Tangenten an P, wenn φ injektiv ist.

Beweis. a) Da F und G keine gemeinsame Komponente haben, ist die Schnittmenge endlich. Sei also $Z(F,G) = \{P, Q_1, \dots, Q_s\}$. Wähle $H \in k[X,Y]$ mit $H(Q_i) = 0$ und $H(P) \neq 0$. Dann sind $HX, HY \in I(Z(F,G)) = \sqrt{(F,G)}$. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$(HX)^N, (HY)^N \in (F,G)\mathcal{O}$$

gilt. Da $H(P) \neq 0$ ist $H \in \mathcal{O}^\times$ und somit $I^{2N} \subset (X^N, Y^N) \subset (F,G)\mathcal{O}$. Trivialerweise ist nun auch $I^t \subset (F,G)\mathcal{O}$ für alle $t \geq 2N$. Wir nutzen dies als Induktionsanfang für eine Rückwärtsinduktion unter der Nebenbedingung $t \geq m+n-1$. Dies zeigt dann die Behauptung.

Induktionsschritt: Seien $L_1, \dots, L_m$ die Tangenten an F in P und $M_1, \dots, M_n$ die Tangenten an G in P. Setze $L_i = L_m$ und $M_j = M_n$ für $i \geq m$ beziehungsweise $j \geq n$ und setze $A_{ij} = L_1 L_2 \cdots L_i M_1 M_2 \cdots M_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$.

Behauptung: Die Menge $\{A_{ij} | i + j = l\}$ bildet eine Basis des k-Vektorraums der homogenen Polynome vom Grad l.

Beweis: Die Menge $\{X^l, X^{l-1}Y, \dots, Y^l\}$ ist eine Basis und hat gleiche Kardinalität es genügt also die lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Sei also

$$\lambda_l M_1 \cdots M_l = \sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i A_{il-i}.$$

Dann teilt L_1 die rechte Seite aber nicht die Linke, denn L_1 ist homogen vom Grad 1 und beschreibt nicht die gleiche Tangente wie ein M_j. Daher ist $\lambda_l = 0$ und

$$\sum_{i=0}^{l-1} \lambda_i A_{il-i}/L_1 = 0.$$

Da $k[X,Y]$ Integritätsbereich ist, reicht es die lineare Unabhängigkeit der $\{A_{il-i}/L_1\}$ zu zeigen. So kann man induktiv weiter fortfahren, wenn man die Behauptung für beliebige F und G formuliert. ✓

Wir wollen nun $I^t \subset (F,G)\mathcal{O}$ zeigen, wenn $I^{t'} \subset (F,G)\mathcal{O}$ für alle $t' > t$ und $t \geq m+n-1$. Dazu genügt es nun $A_{ij} \in (F,G)$ zu zeigen für alle $i, j \in NN_0$ mit $i + j \geq m + n - 1$. Sei nun i, j mit $i + j \geq m + n - 1$ fest gewählt, dann ist $i \geq m$ oder $j \geq n$. Ohne Einschränkung sei $i \geq n$ dann gibt es ein homogenes$B \in k[X,Y]$ vom Grad $i + j - m$ mit $A_{ij} = A_{m0}B$. Schreibe $F = A_{m0} + F'$ mit $F' \in I^{m+1}$, dann gilt $A_{ij} = BF + BF'$ mit $BF \in (F,G)$ und $BF' \in I^{i+j+1} \subset (F,G)\mathcal{O}$ nach Induktionsvoraussetzung.

b) „$\Rightarrow$“ Seien $A, B \in k[X,Y]$ mit $AF + BG \in I^{m+n}$. Schreibe

$$A = A_r + \text{„Terme höherer Ordnung “ und } B = B_s + \text{„Terme höherer Ordnung“}.$$

Angenommen $r < n$ oder $s < m$, dann ist $AF + BG = A_r F_m + B_s G_n + \cdots \in I^{m+n}$. Dies geht nur wenn $r + m = s + n$ und $A_r F_m = -G_n B_s$ Da aber F_m und G_n teilerfremd sind (F und G haben keine gemeinsamen Tangenen in P), folgt A_r teilt G_n und B_s teilt F_m, insbesondere ist $r \geq m$ und $s \geq m$. Widerspruch!

„$\Leftarrow$“ Sei L eine gemeinsame Tangente. Schreibe $F_m = LF'_{m-1}$ und $G_n = LG'_{n-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\varphi(G'_{n-1}, -F'_{m-1}) &= FG'_{n-1} - GF'_{m-1} \\
&\equiv F_m G'_{n-1} - G_n F'_{m-1} \\
&= LF'_{m-1}G'_{n-1} - LG'_{n-1}F'_{m-1} = 0
\end{aligned}$$

□

Definition 20 (Schnittzahl)**.** Zu $F, G \in k[X,Y]$ und $P \in \mathbb{A}_k^2$ ist die Schnittzahl $I(P, F \cap G)$ definiert als $\dim_k(\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(F,G)\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2))$

Bemerkung 21.

- Das Axiomenset (1) bis (7) ist nicht minimal.
- Der Eindeutigkeitsbeweis liefert einen Algorithmus zur Bestimmung der Schnittzahl.

Satz 22. *Sei $F, G \in k[X,Y]$ und $P \in \mathbb{A}_k^2$. Die Schnittzahl erfüllt zusätzlich folgende zwei Eigenschaften.*

(8) $m_P(F) = 1 \Rightarrow I(P, F \cap G) = \text{ord}_{\mathcal{O}_P(F)}(G)$

(9) *Falls F und G keine gemeinsamen Komponenten haben, gilt*

$$\sum_P I(P, F \cap G) = \dim_k(k[X,Y]/(F,G))$$

Beweis.

(8) Da P einfacher Punkt von F ist, liegt P nur auf einer irreduziblen Komponente, daher nehmen wir an, dass F irreduzibel ist. Aus der Isomorphie $\mathcal{O}_P(\mathbb{A}_k^2)/(F,G) \cong \mathcal{O}_P(F)(G)$ und dem Resultat c) der Proposition 10 folgt die Behauptung.

(9) Dies folgt direkt aus Korollar 14.

□

Literatur

[Fulton 1969] Fulton, William: *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometrie*. 1969