Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 12
Abgabe bis 22.01.2015, 9:00h

Aufgabe 43. *(3.5+0.5+1.5+0.5)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, M ein endlich-erzeugter R-Modul und J der Schnitt aller maximalen Ideale von R.

(i) Ist $\mathfrak{a}M = M$, so gibt es ein $r \in 1 + \mathfrak{a}$ mit $rM = 0$.

(ii) $1 + J \subseteq R^\times$.

(iii) Gibt es Elemente $m_1, \ldots, m_r \in M$, deren Restklassen M/JM erzeugen, so erzeugen sie bereits M.

(iv) Ist R ein lokaler Ring und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal, so liftet jede $R/\mathfrak{m}$-Basis von $M/\mathfrak{m}M$ zu einem unverkürzbaren Erzeugendensystem von M.

Aufgabe 44. *(3+3 Punkte)*
Es sei $v\colon K^\times \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine surjektive Bewertung, $\mathcal{O} = \{x \in K^\times \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ der zugehörige Bewertungsring und $\mathfrak{m} = \{x \in \mathcal{O} \mid v(x) > 0\} \cup \{0\}$ sein maximales Ideal.

(i) Es gibt ein $f \in \mathcal{O}$, sodass $\operatorname{Spec} \mathcal{O} \setminus \{\mathfrak{m}\} = D(f)$.

(ii) Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\mathfrak{m}^n$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 45. *(3+3 Punkte)*
Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

(i) Sind X und Y noethersch und ist f endlich, so ist $f_*\mathcal{F}$ kohärent.

(ii) Im Allgemeinen ist die Aussage falsch.

Aufgabe 46. *(3+3 Punkte)*
Sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.

(i) Ist für einen Punkt $x \in X$ der Halm $\mathcal{F}_x$ ein freier $\mathcal{O}_x$-Modul, so gibt es eine offene Umgebung U von x, sodass $\mathcal{F}|_U$ frei ist.

(ii) $\mathcal{F}$ ist genau dann lokal frei vom Rang 1, wenn es einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ gibt, sodass $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$.