

Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

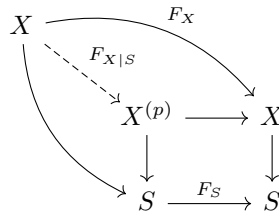
Blatt 11
Abgabe bis 15.01.2015, 9:00h

Aufgabe 39. (6 Punkte)

Die Komposition projektiver Morphismen ist projektiv.

Aufgabe 40. (3+3 Punkte)

Sei S ein Schema der Charakteristik p und X ein S -Schema. Bezeichne mit F_S und F_X die (absoluten) Frobenius-Morphismen aus Aufgabe 20(ii) und definiere den (relativen) Frobenius $F_{X|S}$ über folgendes kommutative Diagramm, wobei das Quadrat kartesisch sei:



- (i) $F_{X|S}$ ist affin und universell abgeschlossen.
- (ii) Ist X lokal von endlichem Typ über S , so ist $F_{X|S}$ endlich.

Aufgabe 41. (3+2 Punkte)

Sei (X, \mathcal{O}_X) ein geringter Raum, sodass kein Halm isomorph zum Nullring ist.

- (i) Für \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{F} und \mathcal{G} ist die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ nicht immer eine Garbe.
- (ii) Ist X zusammenhängend, so ist der Rang eines lokalfreien \mathcal{O}_X -Moduls wohldefiniert.
- (iii) Ist X zusammenhängend und sind \mathcal{F} und \mathcal{G} lokalfreie \mathcal{O}_X -Moduln der Ränge m und n , so ist $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ lokalfrei vom Rang mn (vgl. auch Aufgabe 7).

Aufgabe 42. (3+3 Punkte)

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und $X = \text{Spec } R$.

- (i) \mathcal{O}_X -Moduln entsprechen den Tripeln $(M, V, \rho: M \otimes_R K \rightarrow V)$, wobei M ein R -Modul, V ein K -Vektorraum und ρ ein Homomorphismus von R -Moduln ist.
- (ii) Ein solches Tripel (M, V, ρ) entspricht genau dann einem quasikohärenten \mathcal{O}_X -Modul, wenn ρ ein Isomorphismus ist.

Hinweise.

Die Zusatzaufgaben 3 und 4 werden nicht in den Übungsgruppen, sondern am 13. Januar in der Zentralübung besprochen.