Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 11
Abgabe bis 15.01.2015, 9:00h

Aufgabe 39. *(6 Punkte)*
Die Komposition projektiver Morphismen ist projektiv.

Aufgabe 40. *(3+3 Punkte)*
Sei S ein Schema der Charakteristik p und X ein S-Schema. Bezeichne mit F_S und F_X die (absoluten) Frobenius-Morphismen aus Aufgabe 20(ii) und definiere den (relativen) Frobenius $F_{X|S}$ über folgendes kommutative Diagramm, wobei das Quadrat kartesisch sei:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, dashed, "F_{X|S}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X^{(p)} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}$$

(i) $F_{X|S}$ ist affin und universell abgeschlossen.

(ii) Ist X lokal von endlichem Typ über S, so ist $F_{X|S}$ endlich.

Aufgabe 41. *(3·2 Punkte)*
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, sodass kein Halm isomorph zum Nullring ist.

(i) Für $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ nicht immer eine Garbe.

(ii) Ist X zusammenhängend, so ist der Rang eines lokalfreien $\mathcal{O}_X$-Moduls wohldefiniert.

(iii) Ist X zusammenhängend und sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokalfreie $\mathcal{O}_X$-Moduln der Ränge m und n, so ist $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ lokalfrei vom Rang mn (vgl. auch Aufgabe 7).

Aufgabe 42. *(3+3 Punkte)*
Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und $X = \operatorname{Spec} R$.

(i) $\mathcal{O}_X$-Moduln entsprechen den Tripeln $(M, V, \rho\colon M \otimes_R K \longrightarrow V)$, wobei M ein R-Modul, V ein K-Vektorraum und ρ ein Homomorphismus von R-Moduln ist.

(ii) Ein solches Tripel (M, V, ρ) entspricht genau dann einem quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul, wenn ρ ein Isomorphismus ist.

Hinweise.
Die Zusatzaufgaben 3 und 4 werden nicht in den Übungsgruppen, sondern am 13. Januar in der Zentralübung besprochen.