Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg — Blatt 10

O. Thomas — Abgabe bis 08.01.2015, 9:00h

Aufgabe 37. *(6 Punkte)*
Endliche Morphismen sind eigentlich.

Aufgabe 38. *(6 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1, $S = \operatorname{Spec} R$, $\mathfrak{a} \subseteq R[T]$ ein Ideal und $X = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^1_S$ ein abgeschlossenes Unterschema. Der induzierte Morphismus $X \longrightarrow S$ ist genau dann endlich, wenn $\mathfrak{a}$ ein normiertes Polynom enthält.

Zusatzaufgabe 3. *(6 Punkte)*
In einer Kategorie, in der endliche Faserprodukte existieren, ist für Morphismen $X_1 \longrightarrow Y, X_2 \longrightarrow Y$ und $Y \longrightarrow Z$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_Y X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \times_Z X_2 \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

kartesisch.
(Schon die Kommutativität des Diagramms ist nicht-trivial. Ein großes Diagramm, in der gleichzeitig $X_1 \times_Y X_2 \longrightarrow X_1 \times_Z X_2$ und die definierenden Faserprodukt-Diagramme von $X_1 \times_Y X_2$, $X_1 \times_Z X_2$ und $Y \times_Z Y$ auftreten, kann helfen. Man achte insbesondere bei dieser Aufgabe auf einen nachvollziehbaren Aufschrieb.)

Zusatzaufgabe 4. *(3+3 Punkte)*

(i) Für Morphismen von Schemata $f\colon X \longrightarrow Y, g\colon Y \longrightarrow Z$ ist folgendes Diagramm kartesisch:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d] & X \times_Z Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\Delta_{Y|Z}"] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

(ii) Ist P eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata, die stabil unter Basiswechsel und Komposition ist und sind $f\colon X \longrightarrow Y, g\colon Y \longrightarrow Z$ Morphismen von Schemata, sodass $g \circ f$ und $\Delta_{Y|Z}$ die Eigenschaft P haben, so hat auch f die Eigenschaft P.