Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 9
Abgabe bis 18.12.2014, 9:00h

Aufgabe 33. *(3+3 Punkte)*
Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie, in der (beliebige endliche) Faserprodukte existieren. Ein Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *Monomorphismus*, falls für beliebige $a, b\colon T \longrightarrow X$ gilt: Ist $f \circ a = f \circ b$, so ist schon $a = b$.

(i) $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn $\Delta_{X|Y}\colon X \longrightarrow X \times_Y X$ ein Isomorphismus ist. Die Diagonale $\Delta_{X|Y}$ ist dabei über das gleiche Diagramm wie für Schemata definiert.

(ii) Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Monomorphismus und $Y' \longrightarrow Y$ beliebig, so ist auch der Basiswechsel $f'\colon X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ ein Monomorphismus.

Aufgabe 34. *(6 Punkte)*
Seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Morphismen von Schemata, sodass f universell abgeschlossen und (auf den topologischen Räumen) surjektiv ist. Sei ferner $g \circ f$ separiert. Dann ist g separiert.

Aufgabe 35. *(3·2 Punkte)*
Alle involvierten Schemata seien noethersch.

(i) Separiertheit ist stabil unter Produktbildung, d. h. sind $f\colon X \longrightarrow Y, f'\colon X' \longrightarrow Y'$ separierte Morphismen von S-Schemata, so ist auch $f \times f'\colon X \times_S X' \longrightarrow Y \times_S Y'$ separiert.

(ii) Separiertheit ist lokal auf dem Ziel, d. h. ein Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann separiert, wenn für jede offene Überdeckung $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ die induzierten Morphismen $f^{-1}(Y_\alpha) \longrightarrow Y_\alpha$ separiert sind.

(iii) Offene und abgeschlossene Immersionen sind separiert.

Aufgabe 36. *(4·1.5 Punkte)*

(i) Ein Morphismus ist genau dann von endlichem Typ, wenn er lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

(ii) Sind $f\colon X \longrightarrow Y, g\colon Y \longrightarrow Z$ Morphismen von Schemata, f quasikompakt, $g \circ f$ von endlichem Typ, so ist auch f von endlichem Typ.

(iii) Abgeschlossene Immersionen sind von endlichem Typ.

(iv) Offene quasikompakte Immersionen sind von endlichem Typ.