Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 8
Abgabe bis 11.12.2014, 9:00h

Aufgabe 29. *(6 Punkte)*
Bezeichne mit $\mathbf{?}\colon \mathbf{Sch} \longrightarrow \mathbf{Top}$ den Vergissfunktor von der Kategorie der Schemata in die Kategorie der topologischen Räume. Seien X, Y zwei Schemata über dem Schema S. Dann gibt es eine kanonische (stetige) Abbildung

$$\mathbf{?}(X \times_S Y) \longrightarrow \mathbf{?}X \times_{\mathbf{?}S} \mathbf{?}Y,$$

die immer surjektiv aber im Allgemeinen nicht bijektiv ist.

Aufgabe 30. *(6 Punkte)*
Sei X ein quasikompaktes und quasisepariertes Schema (vgl. Aufgabe 23) und $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann ist die natürliche Abbildung $\mathcal{O}_X(X)_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ ein Isomorphismus, wobei $X_f = \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$ (vgl. Aufgabe 13 für Existenz der Abbildung).

Aufgabe 31. *(3+3 Punkte)*

(i) Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Immersion, so ist f lokal von endlichem Typ.

(ii) Sei k ein Körper. Der Morphismus $\operatorname{Spec} k[t, t^{-1}] \longrightarrow \operatorname{Spec} k[x, y]$, der durch $x \mapsto t, y \mapsto 0$ induziert wird, ist eine Immersion.

Aufgabe 32. *(3+3 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(i) $\mathbb{P}^n_R \cong \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} R$.

(ii) Der kanonische Morphismus $\mathbb{P}^n_R \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ ist separiert.