Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 7
Abgabe bis 04.12.2014, 9:00h

Aufgabe 25. *(3·2 Punkte)*
Für $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ berechne die Faserprodukte

(i) $X \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

(ii) $X \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(iii) $X \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

und fertige Bilder an.[1]

Aufgabe 26. *(6 Punkte)*
Ist $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$, so gibt einen natürlichen Homöomorphismus zwischen $\operatorname{Spec} \overline{\mathbb{Q}} \times_{\mathbb{Q}} \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{Q}}$ und $G(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$.

Aufgabe 27. *(3·2 Punkte)*
Wir nennen ein k-Schema X *geometrisch irreduzibel* (reduziert, integer, ...), wenn $X \times_k k^{\mathrm{alg}}$ irreduzibel (reduziert, integer, ...) ist.

(i) Die affine Kurve $x^2 = 2y^2$ über $\mathbb{Q}$ ist irreduzibel, aber nicht geometrisch irreduzibel.

(ii) Die affine Kurve $y^p = tx^p$ über $\mathbb{F}_p(t)$ ist reduziert, aber nicht geometrisch reduziert.

(iii) Für $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/(x^2+y^2-1), Y = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/(x^2+y^2+1)$ und $L = \mathbb{Q}(i)$ ist $X_L \cong Y_L$ als Schemata über L, aber $X \ncong Y$.

Aufgabe 28. *(6 Punkte)*
Beachte zunächst folgende Definition: Eine Eigenschaft P von Ringhomomorphismen heißt *lokal*, wenn gilt:

(a) Hat $R \longrightarrow S$ die Eigenschaft P und ist $f \in R$, so hat der induzierte Morphismus $R_f \longrightarrow S_f$ die Eigenschaft P.

(b) Sind $f \in R$, $g \in S$, und habe $R_f \longrightarrow S$ die Eigenschaft P, so auch der induzierte Homomorphismus $R \longrightarrow S_g$.

(c) Ist $R \longrightarrow S$, $(g_1, \dots, g_r) = S$ und haben alle induzierten $R \longrightarrow S_{g_i}$ die Eigenschaft P, so auch $R \longrightarrow S$.

Sei P eine lokale Eigenschaften von Ringhomomorphismen. Für einen Morphismus von Schemata $f \colon X \longrightarrow Y$ sind äquivalent:

(i) Ist $\operatorname{Spec} B \subseteq X$ affin offen und $f(\operatorname{Spec} B) \subseteq \operatorname{Spec} A$, so hat die induzierte Abbildung $A \longrightarrow B$ die Eigenschaft P.

(ii) Es gibt eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_i$, von Y und offene affine Überdeckungen $f^{-1}(\operatorname{Spec} A_i) = \bigcup_j \operatorname{Spec} B_{i,j}$, sodass alle induzierten Abbildungen $A_i \longrightarrow B_{i,j}$ die Eigenschaft P haben.

(iii) Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene affine Umgebung $x \in \operatorname{Spec} B$ und eine offene affine Teilmenge $\operatorname{Spec} A \subseteq Y$, sodass $f(\operatorname{Spec} B) \subseteq \operatorname{Spec} A$ und die induzierte Abbildung $A \longrightarrow B$ die Eigenschaft P hat.

---

[1] Ist K ein Körper, $X \longrightarrow \operatorname{Spec} K$ ein K-Schema und $L|K$ eine Körpererweiterung, so schreiben wir oft auch einfach $X \times_K L$ oder sogar X_L für $X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} L$.