Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 6
Abgabe bis 27.11.2014, 9:00h

Aufgabe 21. *(3+3 Punkte)*
Wir können Faserprodukte in einer beliebigen Kategorie über die gleiche universelle Abbildungseigenschaft wie bei Schemata definieren. Sei

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in einer beliebigen Kategorie.

(i) Ist $BCEF$ kartesisch[1], so ist $ABDE$ kartesisch genau dann, wenn $ACDF$ kartesisch ist.

(ii) Finde ein Beispiel, in dem $ABDE$ und $ACDF$ kartesisch sind, $BCEF$ aber nicht.

Aufgabe 22. *(3·2 Punkte)*
Sei $\varphi\colon R \longrightarrow S$ ein Morphismus $\mathbb{N}_0$-graduierter Ringe (d. h. $\varphi(R_d) \subseteq S_d$ für alle d) und setze $D(\varphi) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \varphi(R_+) \not\subseteq \mathfrak{p}\}$ mit dem induzierten Morphismus $\operatorname{Proj}\varphi\colon D(\varphi) \longrightarrow \operatorname{Proj} R$. Weiter sei $\varphi_n\colon R_n \longrightarrow S_n$ surjektiv für $n \gg 0$.

(i) $D(\varphi) = \operatorname{Proj} S$.

(ii) $\operatorname{Proj}\varphi$ ist eine abgeschlossene Immersion.

(iii) Ist $\varphi_n\colon R_n \longrightarrow S_n$ sogar ein Isomorphismus für $n \gg 0$, so ist $\operatorname{Proj}\varphi$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 23. *(3·2 Punkte)*
Ein topologischer Raum heißt *quasisepariert*, falls der Schnitt von je zwei offenen quasikompakten Teilmengen wieder quasikompakt ist. Ein Morphismus von Schemata $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *quasisepariert*, falls für alle affinen offenen $U \subseteq Y$ der topologische Raum $f^{-1}(U)$ quasisepariert ist. X heißt dann *quasisepariert über* Y.

(i) Der kanonische Morphismus von Schemata $X \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist quasisepariert genau dann, wenn der Schnitt zweier offener affiner Teilmengen von X eine endliche Vereinigung offener affiner Teilmengen ist.

(ii) Affine Schemata sind quasisepariert über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

(iii) Ist X lokal noethersch, so ist jedes $f\colon X \longrightarrow Y$ quasisepariert.

Aufgabe 24. *(6 Punkte)*
Sei P eine Eigenschaft von offenen affinen Teilmenge eines Schemas X derart, dass:

(a) Hat $\operatorname{Spec} R \subseteq X$ die Eigenschaft P und ist $f \in R$, dann hat auch $\operatorname{Spec} R_f \subseteq X$ Eigenschaft P.

(b) Ist $(f_1, \ldots, f_n) = R$ und hat $\operatorname{Spec} R_{f_i} \subseteq X$ die Eigenschaft P für alle i, dann auch $\operatorname{Spec} R \subseteq X$.

Ist $X = \bigcup_i \operatorname{Spec} R_i$ wobei $\operatorname{Spec} R_i \subseteq X$ die Eigenschaft P für alle i hat, dann hat jede offene affine Teilmenge von X die Eigenschaft P.

---

[1] Ein kommutatives Diagramm heißt *kartesisch*, wenn es sich um das definierende Diagramm eines Faserprodukts handelt.