Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 5
Abgabe bis 20.11.2014, 9:00h

Aufgabe 17. *(3·2 Punkte)*

(i) Die disjunkte Vereinigung endlich vieler affiner Schemata ist affin.

(ii) Die disjunkte Vereinigung unendlich vieler nicht-trivialer affiner Schemata ist nicht affin.

(iii) Die disjunkte Vereinigung von Schemata erfüllt die universelle Abbildungseigenschaft des Coprodukts in der Kategorie der Schemata.

Aufgabe 18. *(3+3 Punkte)*
Sei k ein Körper.

(i) Ist $P \in \operatorname{Spec} k[X] = \mathbb{A}_k^1$ ein abgeschlossener Punkt und X die Verklebung von $\mathbb{A}_k^1$ mit sich selbst entlang $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{P\}$ („Gerade mit doppeltem Punkt"), dann ist X nicht affin.

(ii) Ist $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{(0,0)\} = \operatorname{Spec} k[X,Y] \setminus \{(X,Y)\}$ affin?

Aufgabe 19. *(3·2 Punkte)*
Es sei X ein Schema.

(i) X ist reduziert genau dann, wenn alle Halme $\mathcal{O}_{X,P}$ reduziert sind.

(ii) $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{red}}$ ist nicht immer eine Garbe.

(iii) Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und X reduziert, so gibt es genau einen Morphismus von Schemata $\tilde{f}\colon X \longrightarrow Y_{\mathrm{red}}$, sodass $f = i\tilde{f}$ mit dem kanonischen Morphismus $i\colon Y_{\mathrm{red}} \longrightarrow Y$.

Aufgabe 20. *(3·2 Punkte)*
Sei p eine Primzahl.

(i) Für ein Schema X sind äquivalent:

 (a) Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist $p\mathcal{O}_X(U) = 0$.

 (b) $p\mathcal{O}_X(X) = 0$.

 (c) Der kanonische Morphismus $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \\ & \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

 Hier ist $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ von der kanonischen Projektion $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ induziert.

X heißt dann *Schema der Charakteristik* p.

(ii) Ist X ein Schema der Charakteristik p, so gibt es genau einen Morphismus von Schemata $F\colon X \longrightarrow X$, der auf dem topologischen Raum X die Identität ist und auf allen $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ durch $f \mapsto f^p$ gegeben ist.

(iii) Gibt es ein Schema X der Charakteristik p, sodass die von F induzierte Abbildung $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ ein Isomorphismus ist, F aber insgesamt kein Automorphismus von X?