Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg — Blatt 4
O. Thomas — Abgabe bis 13.11.2014, 9:00h

Aufgabe 13. *(3·2 Punkte)*
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein geringter Raum und $f \in \mathcal{O}(X)$.

(i) $\{x \in X \mid f_x \neq 0\}$ ist abgeschlossen in X.

(ii) Ist $(X, \mathcal{O})$ ein lokal geringter Raum, so ist $\{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$ offen in X.

(iii) Ist $(X, \mathcal{O})$ ein lokal geringter Raum und $\{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\} = X$, so ist $f \in \mathcal{O}(X)^\times$.

Aufgabe 14. *(4·1.5 Punkte)*
Es sei R ein kommutativer Ring mit 1, $f \in R$, $X = \operatorname{Spec} R$ und $\mathfrak{p} \in X$.

(i) $\{\mathfrak{p}\}$ ist in X genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.

(ii) $D(f) = \varnothing$ genau dann, wenn f nilpotent ist.

(iii) $D(f) = X$ genau dann, wenn f eine Einheit ist.

(iv) Eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann quasikompakt, wenn es ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ gibt mit $U = X \setminus V(\mathfrak{a})$.

Aufgabe 15. *(6 Punkte)*
Überprüfe (die topologischen Räume) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/n]$ für $n \in \mathbb{N}$ auf folgende Eigenschaften: Hausdorffsch, zusammenhängend, irreduzibel, quasikompakt.

Aufgabe 16. *(4·1.5 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1, in welchem für alle $r \in R$ die Gleichung $r^2 = r$ gilt. Betrachte $X = \operatorname{Spec} R$.

(i) Jeder Punkt in X ist abgeschlossen.

(ii) Ist $x \in X$, so ist $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{F}_2$.

(iii) Zwischen $\operatorname{Hom}(R, \mathbb{F}_2)$ und X gibt es eine Bijektion via $\varphi \mapsto \ker \varphi$.

(iv) X ist kompakt und total unzusammenhängend.

Hinweise.
In der algebraischen Geometrie nennen wir topologische Räume *quasikompakt*, wenn sie die übliche Überdeckungskompaktheitseigenschaft erfüllen. Wir nennen einen Raum *kompakt*, wenn er quasikompakt und Hausdorrfsch ist.