Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 3
Abgabe bis 06.11.2014, 9:00h

Aufgabe 9. *(3·2 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum, $Z \subseteq X$ abgeschlossen und $U = X \setminus Z$ mit Inklusionen

$$U \overset{j}{\hookrightarrow} X \overset{i}{\hookleftarrow} Z.$$

(i) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf Z, so ist

$$(i_*\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & P \in Z \\ 0 & P \notin Z. \end{cases}$$

(ii) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf U, so ist

$$(j_!\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & P \in U \\ 0 & P \notin U. \end{cases}$$

(iii) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X, so ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \longrightarrow 0$$

Aufgabe 10. *(6 Punkte)*
Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Dann ist $\operatorname{Spec} A$ genau dann unzusammenhängend, wenn R ein Idempotent ungleich 0 und 1 enthält, was genau dann der Fall ist, wenn es einen Isomorphismus unitärer Ringe $R \cong R' \times R''$ mit $R', R'' \neq 0$ gibt.

Aufgabe 11. *(6 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1, I ein Ideal in R, $n \geq 2$ und setze $X = \operatorname{Spec} R/I$, $Y = \operatorname{Spec} R/I^n$. Der natürliche Morphismus $X \longrightarrow Y$ ist ein Isomorphismus topologischer Räume, aber im Allgemeinen kein Isomorphismus affiner Schemata.

Aufgabe 12. *(3+3 Punkte)*

(i) Klassifiziere die maximalen Ideale von $\mathbb{Z}[X]$.

(ii) Klassifiziere die Primideale von $\mathbb{Z}[X]$.

Zusatzaufgabe 2. *(6 Zusatzpunkte)*
Male ein Bild von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X]$. (Punkte werden für aus dem Bild entnehmbare topologische und arithmetische Eigenschaften vergeben.)

Hinweise.
In der Zentralübung am 04.11. wollen wir uns einige praktische Ergebnisse der kommutativen Algebra näher anschauen.