Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg — Blatt 2

O. Thomas — Abgabe bis 30.10.2014, 9:00h

Aufgabe 5. *(6 Punkte)*
Bestimme alle Garben von Mengen und alle ihre Halme auf $X = \{\heartsuit, \dagger\}$ (mit der diskreten Topologie).

Aufgabe 6. *(3·2 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe.

(i) $\mathcal{F}_A \colon U \longmapsto \{f\colon U \longrightarrow A \mid f \text{ konstant}\}$ ist (mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen) eine Prägarbe, aber im Allgemeinen keine Garbe.

(ii) Die assoziierte Garbe ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_A^+(U) = \{f\colon U \longrightarrow A \mid f \text{ lokal konstant}\}\,.$$

Sie wird auch mit $\underline{A}$ bezeichnet.

(iii) Für $x \in X$ ist $\underline{A}_x \cong A$.

Aufgabe 7. *(3+3 Punkte)*
Es seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Ist $U \subseteq X$ offen, bezeichne mit $\mathcal{F}|_U$ und $\mathcal{G}|_U$ die induzierten Garben auf U.[1]

(i) Es ist

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})\colon U \longmapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

eine Garbe abelscher Gruppen auf X.

(Obacht: $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \neq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$*!)*

(ii) Gilt $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$?

Aufgabe 8. *(6 Punkte)*
Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[X]$, so gibt es eine Primzahl p mit $p \in \mathfrak{m}$.
(Die universelle Abbildungseigenschaft der Lokalisierung $\mathbb{Q}[X] = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Z}[X]$ kann sich dabei als nützlich erweisen, wenn im Anschluss $\mathbb{Q}[X]/(f) \cong \mathbb{Z}[X]/(f)$ zum Widerspruch geführt wird.)

Hinweise.
In der Zentralübung am 28.10. wollen wir eine Intuition für Halme von Garben entwickeln.

---

[1] D. h. ist $V \subseteq U$ offen, so ist $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ etc.