Übungen zur Algebraischen Geometrie I

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. K. Wingberg
O. Thomas

Blatt 1
Abgabe bis 23.10.2014, 9:00h

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1, $r \in R$ und $S = \{1, r, r^2, \dots\}$. Dann ist $S^{-1}R \cong R[X]/(rX - 1)$.

Aufgabe 2. *(3·2 Punkte)*
Sei k ein Körper und $R = k[X, Y]/(X^2 + 5Y^2)$. Wann ist R …

(i) … nullteilerfrei?

(ii) … reduziert (d. h. ohne nilpotente Elemente)?

(iii) … faktoriell?

Aufgabe 3. *(3+3 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und M ein R-Torsionsmodul.[1]

(i) Ist $R = \mathbb{Z}$, so ist M direkter Limes seiner endlichen Untermoduln.

(ii) Im Allgemeinen ist die Aussage falsch.

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*
Für k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f_1, \dots, f_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ sei die induzierte Abbildung $(f_1, \dots, f_n)\colon \mathbb{A}_k^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$ ein Isomorphismus. Dann ist

$$\det\,(\partial_j f_i)_{i,j} \in k^\times,$$

wobei ∂_j die sich aus $\partial_j(X_k) = \delta_{jk}$ ergebende Derivation ist.

Zusatzaufgabe 1. *(6 Bonuspunkte)*
Für k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f_1, \dots, f_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ sei

$$\det\,(\partial_j f_i)_{i,j} \in k^\times,$$

wobei ∂_j die sich aus $\partial_j(X_k) = \delta_{jk}$ ergebende Derivation ist. Dann ist die induzierte Abbildung $(f_1, \dots, f_n)\colon \mathbb{A}_k^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$ ein Isomorphismus.

Hinweise.
In der ersten Zentralübung (am 21.10. um 16 Uhr in Hörsaal 1) werden wir einige Ergebnisse über Tensorprodukte, Lokalisierungen und direkte Limiten wiederholen.

---

[1] Ein R-Modul M heißt R-Torsionsmodul, wenn es für jedes $m \in M$ ein $r \in R$ gibt, welches kein Nullteiler ist, sodass $rm = 0$.