Mélange topologique de flots hyperboliques homogènes

Nguyen-Thi Dang

Séminaire HORUS, 15 juin 2020

MATHEMATISCHES
INSTITUT

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

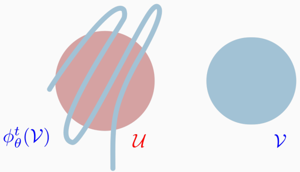
Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

(1) Une famille de systèmes dynamiques
(2) Classification et critères de mélange
(3) Cône de Benoist
(4) Ensembles invariants
(5) Condition nécessaire de mélange
(6) Condition suffisante de mélange
(6.1) Produit générique d'éléments loxodromiques
(6.2) Cas $Z_G(A)$ abélien

Mélange topologique :

$\Omega \curvearrowleft \phi^t$ est *topologiquement mélangeante* si pour tout $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \Omega$, il existe $T > 0$ tel que $\phi^t(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ pour tout $t \geq T$.



Une famille de systèmes dynamiques

G groupe de Lie semisimple de type non-compact
et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret.

Une famille de systèmes dynamiques

G groupe de Lie semisimple de type non-compact et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret.

Flots hyperboliques homogènes

Toute action non-triviale $\Gamma \backslash G \curvearrowleft (a_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset A$ d'un tore déployé maximal A.

$\mathfrak{a} := Lie(A)$, choisissons $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl positive fermée, $\mathfrak{a}^{++}$ son intérieur.

Une famille de systèmes dynamiques

G groupe de Lie semisimple de type non-compact et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret.

Flots hyperboliques homogènes

Toute action non-triviale $\Gamma \backslash G \curvearrowleft (a_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset A$ d'un tore déployé maximal A.

$\mathfrak{a} := Lie(A)$, choisissons $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl positive fermée, $\mathfrak{a}^{++}$ son intérieur.

Paramétrisation

Pour tout $\theta \in \mathfrak{a}$, on pose $\phi_\theta^t(\Gamma g) := \Gamma g e^{t\theta}$. Lorsque $\theta \in \mathfrak{a}^+$ non nul, ϕ_θ^t est un flot *hyperbolique orienté*, *loxodromique* si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.

Soit M le sous-groupe compact tel que $AM = Z_G(A)$ et M_0 sa composante connexe en l'identité.

Une famille de systèmes dynamiques

G groupe de Lie semisimple de type non-compact et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret.

Flots hyperboliques homogènes

Toute action non-triviale $\Gamma\backslash G \curvearrowleft (a_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset A$ d'un tore déployé maximal A.

$\mathfrak{a} := Lie(A)$, choisissons $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl positive fermée, $\mathfrak{a}^{++}$ son intérieur.

Paramétrisation

Pour tout $\theta \in \mathfrak{a}$, on pose $\phi_\theta^t(\Gamma g) := \Gamma g e^{t\theta}$.
Lorsque $\theta \in \mathfrak{a}^+$ non nul, ϕ_θ^t est un flot *hyperbolique orienté*, *loxodromique* si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.

Soit M le sous-groupe compact tel que $AM = Z_G(A)$ et M_0 sa composante connexe en l'identité.

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SO}(n,1)_0$
$diag(e^{t_1},\dots,e^{t_n})$, $\sum_{i=1}^n t_i = 0$	$\begin{pmatrix} e^t & & \\ & 1_{n-1} & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}_{t\in\mathbb{R}}$
$diag(t_1,\dots,t_n)$, $t_1 \geq \dots \geq t_n$	$\begin{pmatrix} t & & \\ & 0_{n-1} & \\ & & -t \end{pmatrix}_{t\geq 0}$
$diag(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\varepsilon_1\dots\varepsilon_n = 1$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mathrm{SO}_{n-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Flot hyperbolique homogène $\Gamma\backslash G \curvearrowleft \phi_\theta^t \longrightarrow \Gamma\backslash G/M \curvearrowleft \phi_\theta^t$ flot des chambres de Weyl.
$\mathrm{SO}(n,1)^0$ flot des repères flot géodésique

Résultat

Théorème (thèse et préprint en préparation)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense.

Résultat

Théorème (thèse et préprint en préparation)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense. Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$, une partition $(\Omega_{[m]})_{[m] \in M/M_\Gamma}$ d'un fermé AM-invariant tel que

Résultat

Théorème (thèse et préprint en préparation)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense. Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$, une partition $(\Omega_{[m]})_{[m] \in M/M_\Gamma}$ d'un fermé AM-invariant tel que

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;

(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m] \in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués ;

(c) si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $(\Omega_{[e]}, \phi^t_\theta)$ est topologiquement mélangeant alors $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$;

Résultat

Théorème (thèse et préprint en préparation)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense. Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$, une partition $(\Omega_{[m]})_{[m] \in M/M_\Gamma}$ d'un fermé AM-invariant tel que

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;

(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m] \in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués ;

(c) si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $(\Omega_{[e]}, \phi^t_\theta)$ est topologiquement mélangeant alors $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$;

(d) lorsque M_0 est *abélien* et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, on a la réciproque de (c).

$\mathcal{B}(\Gamma) \subset \mathfrak{a}^+$ est le cône de Benoist de Γ, c'est un fermé, convexe d'intérieur non vide.
CNS de mélange pour $\mathrm{SO}(p,q)_0$ avec $|p-q| \leq 2$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ ...

Résultat

Théorème (thèse et préprint en préparation)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense. Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$, une partition $(\Omega_{[m]})_{[m]\in M/M_\Gamma}$ d'un fermé AM-invariant tel que

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;

(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m]\in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués ;

(c) si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $(\Omega_{[e]}, \phi^t_\theta)$ est topologiquement mélangeant alors $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$;

(d) lorsque M_0 est *abélien* et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, on a la réciproque de (c).

$\mathcal{B}(\Gamma) \subset \mathfrak{a}^+$ est le cône de Benoist de Γ, c'est un fermé, convexe d'intérieur non vide.
CNS de mélange pour $\mathrm{SO}(p,q)_0$ avec $|p-q| \leq 2$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ ...

Γ réseau irréductible : Howe-Moore $\Rightarrow$ mélange sur $\Gamma\backslash G$

Flot des repères de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ i.e. $\Gamma\backslash\mathrm{SO}(n,1)_0 \curvearrowleft a_t$

Maucourant- Schapira (2019) : $\Gamma \subset G$ Zariski dense, alors le flot des repères est topologiquement mélangeant sur son ensemble non-errant. Winter (2016) Γ convexe cocompact.

Côte de Benoist

Décomposition de Jordan

g	$=$	g_e	g_h	g_u
partie		*elliptique*	*hyperbolique*	*unipotente*
qui commutent		$\subset$ compact max	$\subset$ tore déployé max	$\subset$ unipotent max

Cône de Benoist

Décomposition de Jordan

g $=$	g_e	g_h	g_u
partie	*elliptique*	*hyperbolique*	*unipotente*
qui commutent	$\subset$ compact max	$\subset$ tore déployé max	$\subset$ unipotent max

Définition

Projection de Jordan, $g \in G \mapsto \lambda(g) \in \mathfrak{a}^+$ unique élément tel que $g_h \sim e^{\lambda(g)}$.

Lorsque $\lambda(g) \in \mathfrak{a}^{++}$, on dit que g est *loxodromique*.

Cône de Benoist

Décomposition de Jordan

$g \quad =$	g_e	g_h	g_u
partie	*elliptique*	*hyperbolique*	*unipotente*
qui commutent	$\subset$ compact max	$\subset$ tore déployé max	$\subset$ unipotent max

Définition

Projection de Jordan, $g \in G \mapsto \lambda(g) \in \mathfrak{a}^+$ unique élément tel que $g_h \sim e^{\lambda(g)}$.

Lorsque $\lambda(g) \in \mathfrak{a}^{++}$, on dit que g est *loxodromique*.
Cône de Benoist $\mathcal{B}(\Gamma) := \overline{\cup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)}$.

Théorème (Benoist 97')

Lorsque Γ est Zariski dense, $\mathcal{B}(\Gamma)$ est un cône convexe fermé d'intérieur non vide.

Cône de Benoist

Décomposition de Jordan

g	$=$ g_e	g_h	g_u
partie	*elliptique*	*hyperbolique*	*unipotente*
qui commutent	$\subset$ compact max	$\subset$ tore déployé max	$\subset$ unipotent max

Définition

Projection de Jordan, $g \in G \mapsto \lambda(g) \in \mathfrak{a}^+$ unique élément tel que $g_h \sim e^{\lambda(g)}$.

Lorsque $\lambda(g) \in \mathfrak{a}^{++}$, on dit que g est *loxodromique*.
Cône de Benoist $\mathcal{B}(\Gamma) := \overline{\cup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)}$.

Théorème (Benoist 97')

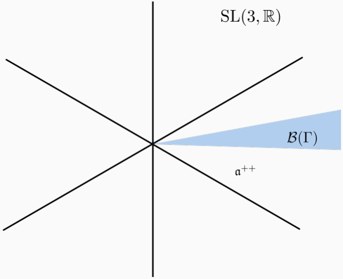
Lorsque Γ est Zariski dense, $\mathcal{B}(\Gamma)$ est un cône convexe fermé d'intérieur non vide.

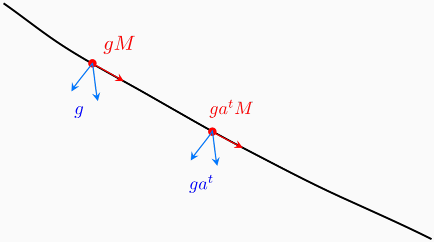
Loxodromiques de Γ
$\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$

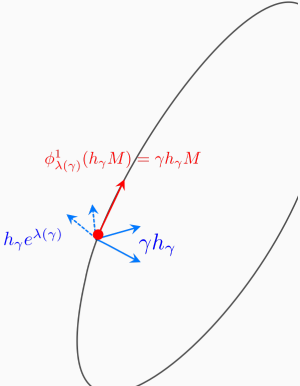
$\lambda(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++} \subset \mathcal{B}(\Gamma)$

Orbites périodiques dans $\Gamma \backslash G/M$
$\gamma h_\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} \in h_\gamma M e^{\lambda(g)}$

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma\backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.







Ensembles invariants

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma \backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.

Ensembles invariants

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma \backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.

Dans $\Gamma\backslash G/M$

$$\Omega := \overline{\{wA \quad | \quad \theta \in \lambda(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++} \; \text{ et } \phi^t_\theta(w) \text{ périodique}\}}.$$

Notons $p_{G/M} : G/M \to \Gamma\backslash G/M$ et $p_G : G \to \Gamma \backslash G$, posons $\widetilde{\Omega} := p_{G/M}^{-1}(\Omega)$.

Ensembles invariants

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma\backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.

Dans $\Gamma\backslash G/M$

$$\Omega := \overline{\{wA \quad | \quad \theta \in \lambda(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++} \text{ et } \phi^t_\theta(w) \text{ périodique}\}}.$$

Notons $p_{G/M} : G/M \to \Gamma\backslash G/M$ et $p_G : G \to \Gamma\backslash G$, posons $\widetilde{\Omega} := p_{G/M}^{-1}(\Omega)$.
K (resp. N) sous-groupe compact (resp. unipotent) maximal tels que $G = KAN$.
Notons $\pi_{G/M} : G \to G/M$ et $\pi_K : K \to G/MAN$.

Théorème (Guivarc'h-Raugi 2007)

Soit Γ Zariski dense. Notons $L(\Gamma)$ l'ensemble limite pour l'action $\Gamma \curvearrowright G/MAN$.

Ensembles invariants

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma\backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.

Dans $\Gamma\backslash G/M$

$$\Omega := \overline{\{wA \quad | \quad \theta \in \lambda(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++} \ \text{ et } \phi^t_\theta(w) \text{ périodique}\}}.$$

Notons $p_{G/M} : G/M \to \Gamma\backslash G/M$ et $p_G : G \to \Gamma\backslash G$, posons $\widetilde{\Omega} := p^{-1}_{G/M}(\Omega)$.
K (resp. N) sous-groupe compact (resp. unipotent) maximal tels que $G = KAN$.
Notons $\pi_{G/M} : G \to G/M$ et $\pi_K : K \to G/MAN$.

Théorème (Guivarc'h-Raugi 2007)

Soit Γ Zariski dense. Notons $L(\Gamma)$ l'ensemble limite pour l'action $\Gamma \curvearrowright G/MAN$.Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$ et une partition en sous-ensembles Γ-invariants minimaux et M_Γ-invariants

$$\pi_K^{-1}\big(L(\Gamma)\big) = \sqcup_{[m]\in M/M_\Gamma} L_{[m]}(\Gamma) \subset K.$$

De plus, pour tout $m \in M$, on a $L_{[m]}(\Gamma) = L_{e_M}(\Gamma)m$.

$\pi^{-1}_{G/M}(\widetilde{\Omega})$ est AM-invariant à droite

Ensembles invariants

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma\backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.

Dans $\Gamma\backslash G/M$

$$\Omega := \overline{\{wA \quad | \quad \theta \in \lambda(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++} \ \text{ et } \phi^t_\theta(w) \text{ périodique}\}}.$$

Notons $p_{G/M} : G/M \to \Gamma\backslash G/M$ et $p_G : G \to \Gamma\backslash G$, posons $\widetilde{\Omega} := p_{G/M}^{-1}(\Omega)$.
K (resp. N) sous-groupe compact (resp. unipotent) maximal tels que $G = KAN$.
Notons $\pi_{G/M} : G \to G/M$ et $\pi_K : K \to G/MAN$.

Théorème (Guivarc'h-Raugi 2007)

Soit Γ Zariski dense. Notons $L(\Gamma)$ l'ensemble limite pour l'action $\Gamma \curvearrowright G/MAN$.Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$ et une partition en sous-ensembles Γ-invariants minimaux et M_Γ-invariants

$$\pi_K^{-1}(L(\Gamma)) = \sqcup_{[m]\in M/M_\Gamma} L_{[m]}(\Gamma) \subset K.$$

De plus, pour tout $m \in M$, on a $L_{[m]}(\Gamma) = L_{e_M}(\Gamma)m$.

$\pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ est AM-invariant à droite Décomposition d'Iwasawa : $G = KAN$

Ensembles invariants de $\Gamma\backslash G$

Posons $\widetilde{\Omega}_{[m]} := L_{[m]}(\Gamma)AN \cap \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ et $\Omega_{[m]} := p_G(\widetilde{\Omega}_{[m]}) = \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_{[m]}$.

(a), (b) et (c)

$\widetilde{\Omega}_{[m]} := L_{[m]}(\Gamma)AN \cap \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ et
$\Omega_{[m]} := \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_{[m]}$.

Énoncés

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;

(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m]\in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués.

(a), (b) et (c)

$\widetilde{\Omega}_{[m]} := L_{[m]}(\Gamma)AN \cap \pi^{-1}_{G/M}(\widetilde{\Omega})$ et
$\Omega_{[m]} := \Gamma \backslash \widetilde{\Omega}_{[m]}$.

Énoncés

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;
(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m] \in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués.

(a) Notons $\pi_{G/AM} : G/M \to G/AM$.

Conze-Guivarc'h (2000), D.-Glorieux (2020)

$\Gamma \curvearrowright \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})$ a des orbites denses.

$\Rightarrow \pi^{-1}_{G/M}(\widetilde{\Omega})$ est Γ-invariant et AM-invariant.
GR07 : $L_{[m]}(\Gamma)$ est Γ-invariant et M_Γ-invariant.
M normalise AN.

(a), (b) et (c)

$\widetilde{\Omega}_{[m]} := L_{[m]}(\Gamma)AN \cap \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ et
$\Omega_{[m]} := \Gamma \backslash \widetilde{\Omega}_{[m]}$.

Énoncés

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;
(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m] \in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués.

(a) Notons $\pi_{G/AM} : G/M \to G/AM$.

Conze-Guivarc'h (2000), D.-Glorieux (2020)

$\Gamma \curvearrowright \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})$ a des orbites denses.

$\Rightarrow \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ est Γ-invariant et AM-invariant.
GR07 : $L_{[m]}(\Gamma)$ est Γ-invariant et M_Γ-invariant.
M normalise AN.

(b) GR07 : $L_{[m]}(\Gamma) = L_{e_M}(\Gamma)m$ et $M \subset Z_G(A)$.

(a), (b) et (c)

$\widetilde{\Omega}_{[m]} := L_{[m]}(\Gamma)AN \cap \pi^{-1}_{G/M}(\widetilde{\Omega})$ et
$\Omega_{[m]} := \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_{[m]}$.

Énoncés

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;
(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m]\in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués.

(a) Notons $\pi_{G/AM} : G/M \to G/AM$.

Conze-Guivarc'h (2000), D.-Glorieux (2020)

$\Gamma \curvearrowright \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})$ a des orbites denses.

$\Rightarrow \pi^{-1}_{G/M}(\widetilde{\Omega})$ est Γ-invariant et AM-invariant.
GR07 : $L_{[m]}(\Gamma)$ est Γ-invariant et M_Γ-invariant.
M normalise AN.

(b) GR07 : $L_{[m]}(\Gamma) = L_{e_M}(\Gamma)m$ et $M \subset Z_G(A)$.

Condition nécessaire

(c) si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $(\Omega_{[e]}, \phi^t_\theta)$ est topologiquement mélangeant alors $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$

$\pi_{G/M}(\Omega_{[e]}) = \Omega \curvearrowleft \phi^t_\theta$ est topologiquement mélangeant.

Théorème (D.-Glorieux)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.

Alors $\Omega \curvearrowleft \phi^t_\theta$ est topologiquement mélangeant ssi θ est dans l'intérieur du cône de Benoist.

Réciproque

Fixons $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$.

Énoncé de mélange

Pour tout $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subset \widetilde{\Omega}_{[e_M]}$ ouverts non vides, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que $\widetilde{U} e^{t\theta} \cap \gamma_t \widetilde{V} \neq \emptyset$

• Fixer des sections locales $s_1, s_2 : G \to G/AM$ définis $O_1^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$ et $O_2^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$. En utilisant les décompositions de Bruhat et d'Iwasawa.

Réciproque

Fixons $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}(\Gamma)$.

Énoncé de mélange

Pour tout $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subset \widetilde{\Omega}_{[e_M]}$ ouverts non vides, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que $\widetilde{U} e^{t\theta} \cap \gamma_t \widetilde{V} \neq \emptyset$

- Fixer des sections locales $s_1, s_2 : G \to G/AM$ définis $O_1^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$ et $O_2^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$. En utilisant les décompositions de Bruhat et d'Iwasawa.

Énoncé (bis)

$U^{\pm} \times U_{AM} \subset \left(O_1^{\pm} \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_{\Gamma}$ et $V^{\pm} \times V_{AM} \subset \left(O_2^{\pm} \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_{\Gamma}$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que
$s_1(U^{\pm}) U_{AM} e^{t\theta} \cap \gamma_t s_2(V^{\pm}) V_{AM} \neq \emptyset$.

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_t s_V = s_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1},$$

avec $(s_V, s_U) \subset s_1(U^{\pm}) \times s_2(V^{\pm})$.

Réciproque

Fixons $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$.

Énoncé de mélange

Pour tout $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subset \widetilde{\Omega}_{[e_M]}$ ouverts non vides, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que $\widetilde{U} e^{t\theta} \cap \gamma_t \widetilde{V} \neq \emptyset$

• Fixer des sections locales $s_1, s_2 : G \to G/AM$ définis $O_1^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$ et $O_2^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$. En utilisant les décompositions de Bruhat et d'Iwasawa.

Énoncé (bis)

$U^{\pm} \times U_{AM} \subset \left(O_1^{\pm} \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_{\Gamma}$ et $V^{\pm} \times V_{AM} \subset \left(O_2^{\pm} \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_{\Gamma}$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que
$s_1(U^{\pm}) U_{AM} e^{t\theta} \cap \gamma_t s_2(V^{\pm}) V_{AM} \neq \emptyset$.

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_t s_V = s_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1},$$

avec $(s_V, s_U) \subset s_1(U^{\pm}) \times s_2(V^{\pm})$.

Conze-Guivarc'h (2000), D.-Glorieux (2020)

$\Gamma \curvearrowright \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})$ a des orbites denses.

$\Rightarrow$ On va pouvoir supposer $s_U = s_V$ et on va chercher

$$\gamma_t \in \{ h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \ ; \ h_U \in s_U \}.$$

Réciproque

Fixons $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$.

Énoncé de mélange

Pour tout $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subset \widetilde{\Omega}_{[e_M]}$ ouverts non vides, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que $\widetilde{U}e^{t\theta} \cap \gamma_t \widetilde{V} \neq \emptyset$

• Fixer des sections locales $s_1, s_2 : G \to G/AM$ définis $O_1^\pm \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$ et $O_2^\pm \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$. En utilisant les décompositions de Bruhat et d'Iwasawa.

Énoncé (bis)

$U^\pm \times U_{AM} \subset \left(O_1^\pm \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_\Gamma$ et $V^\pm \times V_{AM} \subset \left(O_2^\pm \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_\Gamma$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que
$s_1(U^\pm)U_{AM}e^{t\theta} \cap \gamma_t s_2(V^\pm)V_{AM} \neq \emptyset$.

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_t s_V = s_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1},$$

avec $(s_V, s_U) \subset s_1(U^\pm) \times s_2(V^\pm)$.

Conze-Guivarc'h (2000), D.-Glorieux (2020)

$\Gamma \curvearrowright \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})$ a des orbites denses.

$\Rightarrow$ On va pouvoir supposer $s_U = s_V$ et on va chercher

$$\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \ ; \ h_U \in s_U\}.$$

Lorsque t est grand,
$e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} \in A^{++}M_\Gamma \Rightarrow \gamma_t$ est loxodromique.

Produit d'éléments loxodromiques génériques

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ loxodromique tel que $\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \; ; \; h_U \in s_U\}$.

Produit d'éléments loxodromiques génériques

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ loxodromique tel que $\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \ ; \ h_U \in s_U\}$.
Pour tout $g \in G^{lox}$, il existe $h_g \in G$ tel que $g h_g \in e^{\lambda(g)} M h_g$ et h_g est défini modulo multiplication à droite par AM.

Projection de Jordan localement étendue

Soit $s : O_s^{\pm} \subset G/AM \to G$ une section. Pour tout $g \in G^{lox}$ tel que $h_g AM \in O_s^{\pm}$, on définit

$$\mathcal{L}_s(g) := s(h_g AM)^{-1} \, g \, s(h_g AM) \in M e^{\lambda(g)}.$$

Produit d'éléments loxodromiques génériques

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ loxodromique tel que $\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \; ; \; h_U \in s_U\}$.
Pour tout $g \in G^{lox}$, il existe $h_g \in G$ tel que $gh_g \in e^{\lambda(g)} M h_g$ et h_g est défini modulo multiplication à droite par AM.

Projection de Jordan localement étendue

Soit $s : O_s^{\pm} \subset G/AM \to G$ une section. Pour tout $g \in G^{lox}$ tel que $h_g AM \in O_s^{\pm}$, on définit

$$\mathcal{L}_s(g) := s(h_g AM)^{-1} \, g \, s(h_g AM) \in M e^{\lambda(g)}.$$

G/AM s'identifie à l'espace des couples de points transverses de G/MAN.
$h_g \leftrightarrow g^{\pm}$ couple de drapeaux attractif et répulsif pour $g \curvearrowright G/MAN$.

Proposition

Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g_k, ..., g_1 \in G$ des éléments (r, ε)-loxodromiques et r-génériques.

Produit d'éléments loxodromiques génériques

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ loxodromique tel que $\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \ ; \ h_U \in s_U\}$.
Pour tout $g \in G^{lox}$, il existe $h_g \in G$ tel que $gh_g \in e^{\lambda(g)} M h_g$ et h_g est défini modulo multiplication à droite par AM.

Projection de Jordan localement étendue

Soit $s : O_s^{\pm} \subset G/AM \to G$ une section. Pour tout $g \in G^{lox}$ tel que $h_g AM \in O_s^{\pm}$, on définit

$$\mathcal{L}_s(g) := s(h_g AM)^{-1} \, g \, s(h_g AM) \in Me^{\lambda(g)}.$$

G/AM s'identifie à l'espace des couples de points transverses de G/MAN.
$h_g \leftrightarrow g^{\pm}$ couple de drapeaux attractif et répulsif pour $g \curvearrowright G/MAN$.

Proposition

Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g_k, ..., g_1 \in G$ des éléments (r, ε)-loxodromiques et r-génériques. Pour tout choix de projections de Jordan étendues $\mathcal{L}_k, ..., \mathcal{L}_1$ de sorte que chaque $\mathcal{L}_i(g_i)$ est bien définie, il existe $\mathcal{R}_k, ..., \mathcal{R}_1 \in AM$ tels que pour tout $n_k, ..., n_1 \geq 1$

Produit d'éléments loxodromiques génériques

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ loxodromique tel que $\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \; ; \; h_U \in s_U\}$.
Pour tout $g \in G^{lox}$, il existe $h_g \in G$ tel que $gh_g \in e^{\lambda(g)} M h_g$ et h_g est défini modulo multiplication à droite par AM.

Projection de Jordan localement étendue

Soit $s : O_s^{\pm} \subset G/AM \to G$ une section. Pour tout $g \in G^{lox}$ tel que $h_g AM \in O_s^{\pm}$, on définit

$$\mathcal{L}_s(g) := s(h_g AM)^{-1} \, g \, s(h_g AM) \in Me^{\lambda(g)}.$$

G/AM s'identifie à l'espace des couples de points transverses de G/MAN.
$h_g \leftrightarrow g^{\pm}$ couple de drapeaux attractif et répulsif pour $g \curvearrowright G/MAN$.

Proposition

Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g_k, ..., g_1 \in G$ des éléments (r, ε)-loxodromiques et r-génériques. Pour tout choix de projections de Jordan étendues $\mathcal{L}_k, ..., \mathcal{L}_1$ de sorte que chaque $\mathcal{L}_i(g_i)$ est bien définie, il existe $\mathcal{R}_k, ..., \mathcal{R}_1 \in AM$ tels que pour tout $n_k, ..., n_1 \geq 1$

$$\mathcal{L}_k(g_k^{n_k} ... g_1^{n_1}) \overset{l\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}_k(g_k)^{n_k})\mathcal{R}_k ... \mathcal{L}_1(g_1)^{n_1})\mathcal{R}_1,$$

Produit d'éléments loxodromiques génériques

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ loxodromique tel que $\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \ ; \ h_U \in s_U\}$.
Pour tout $g \in G^{lox}$, il existe $h_g \in G$ tel que $gh_g \in e^{\lambda(g)} M h_g$ et h_g est défini modulo multiplication à droite par AM.

Projection de Jordan localement étendue

Soit $s : O_s^{\pm} \subset G/AM \to G$ une section. Pour tout $g \in G^{lox}$ tel que $h_g AM \in O_s^{\pm}$, on définit

$$\mathcal{L}_s(g) := s(h_g AM)^{-1} \, g \, s(h_g AM) \in Me^{\lambda(g)}.$$

G/AM s'identifie à l'espace des couples de points transverses de G/MAN.
$h_g \leftrightarrow g^{\pm}$ couple de drapeaux attractif et répulsif pour $g \curvearrowright G/MAN$.

Proposition

Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g_k, ..., g_1 \in G$ des éléments (r, ε)-loxodromiques et r-génériques. Pour tout choix de projections de Jordan étendues $\mathcal{L}_k, ..., \mathcal{L}_1$ de sorte que chaque $\mathcal{L}_i(g_i)$ est bien définie, il existe $\mathcal{R}_k, ..., \mathcal{R}_1 \in AM$ tels que pour tout $n_k, ..., n_1 \geq 1$

$$\mathcal{L}_k(g_k^{n_k} ... g_1^{n_1}) \overset{l\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}_k(g_k)^{n_k})\mathcal{R}_k ... \mathcal{L}_1(g_1)^{n_1})\mathcal{R}_1,$$

et $g = g_k^{n_k} ... g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)$-loxodromique avec $(g^+, g^-) \in B(g_k^+, \varepsilon) \times B(g_1^-, \varepsilon)$.

Cas $Z_G(A)$ abélien

$$\mathcal{L}_k(g_k^{n_k}...g_1^{n_1}) \overset{l\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}_k(g_k)^{n_k})\mathcal{R}_k...\mathcal{L}_1(g_1)^{n_1})\mathcal{R}_1,$$

$\mathcal{L} : G^{lox} \to M\exp(\mathfrak{a}^{++})$ ne dépend plus des choix de sections.

Théorème Guivarc'h-Raugi (2007)

Γ Zariski dense. Alors $\overline{\langle \mathcal{L}(\Gamma^{lox}) \rangle} = AM_\Gamma$.

Cas $Z_G(A)$ abélien

$$\mathcal{L}_k(g_k^{n_k}...g_1^{n_1}) \overset{l\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}_k(g_k)^{n_k})\mathcal{R}_k...\mathcal{L}_1(g_1)^{n_1})\mathcal{R}_1,$$

$\mathcal{L} : G^{lox} \to M\exp(\mathfrak{a}^{++})$ ne dépend plus des choix de sections.

Théorème Guivarc'h-Raugi (2007)

Γ Zariski dense. Alors $\overline{\langle \mathcal{L}(\Gamma^{lox}) \rangle} = AM_\Gamma$.

Proposition Benoist (1997)

Soit Γ Zariski dense et θ de l'intérieur de $\mathcal{B}(\Gamma)$. Alors il existe un système de générateurs r-générique $S \subset \Gamma$ et $\varepsilon_n \to 0$ tels que

- θ est dans l'intérieur du cône polygonal non dégénéré engendré par $\lambda(S)$.
- Pour tout $n \geq 1$, la famille S_n d'éléments (r, ε_n)-loxodromiques et r-génériques engendre un Schottky Zariski dense.

Cas $Z_G(A)$ abélien

$$\mathcal{L}_k(g_k^{n_k}\ldots g_1^{n_1}) \overset{I\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}_k(g_k)^{n_k})\mathcal{R}_k\ldots\mathcal{L}_1(g_1)^{n_1})\mathcal{R}_1,$$

$\mathcal{L} : G^{lox} \to M\exp(\mathfrak{a}^{++})$ ne dépend plus des choix de sections.

Théorème Guivarc'h-Raugi (2007)

Γ Zariski dense. Alors $\overline{\langle\mathcal{L}(\Gamma^{lox})\rangle} = AM_\Gamma$.

Proposition Benoist (1997)

Soit Γ Zariski dense et θ de l'intérieur de $\mathcal{B}(\Gamma)$. Alors il existe un système de générateurs r-générique $S \subset \Gamma$ et $\varepsilon_n \to 0$ tels que

- θ est dans l'intérieur du cône polygonal non dégénéré engendré par $\lambda(S)$.
- Pour tout $n \geq 1$, la famille S_n d'éléments (r, ε_n)-loxodromiques et r-génériques engendre un Schottky Zariski dense.

$n \geq 1$ posons le $\Gamma/\langle S_n\rangle$ revêtement $\langle S_n\rangle\backslash G \supset \widehat{\Omega}_{[e_M]} \curvearrowleft \phi_\theta^t \longrightarrow \Omega_{[e_M]} \curvearrowleft \phi_\theta^t$.
Prop + G-R + Prop $\Rightarrow \mathcal{L}(g_k^{n_k}\ldots g_1^{n_1})$ est $I\delta_{r,\varepsilon}$ dense dans $M_{\langle S_n\rangle}\exp C(\lambda(S))$.

Cas $Z_G(A)$ abélien

$$\mathcal{L}_k(g_k^{n_k}...g_1^{n_1}) \overset{I\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}_k(g_k)^{n_k})\mathcal{R}_k...\mathcal{L}_1(g_1)^{n_1})\mathcal{R}_1,$$

$\mathcal{L} : G^{lox} \to M\exp(\mathfrak{a}^{++})$ ne dépend plus des choix de sections.

Théorème Guivarc'h-Raugi (2007)

Γ Zariski dense. Alors $\overline{\langle \mathcal{L}(\Gamma^{lox})\rangle} = AM_\Gamma$.

Proposition Benoist (1997)

Soit Γ Zariski dense et θ de l'intérieur de $\mathcal{B}(\Gamma)$. Alors il existe un système de générateurs r-générique $S \subset \Gamma$ et $\varepsilon_n \to 0$ tels que

- θ est dans l'intérieur du cône polygonal non dégénéré engendré par $\lambda(S)$.
- Pour tout $n \geq 1$, la famille S_n d'éléments (r, ε_n)-loxodromiques et r-génériques engendre un Schottky Zariski dense.

$n \geq 1$ posons le $\Gamma/\langle S_n\rangle$ revêtement $\langle S_n\rangle\backslash G \supset \widehat{\Omega}_{[e_M]} \curvearrowleft \phi_\theta^t \longrightarrow \Omega_{[e_M]} \curvearrowleft \phi_\theta^t$.
Prop + G-R + Prop $\Rightarrow \mathcal{L}(g_k^{n_k}...g_1^{n_1})$ est $I\delta_{r,\varepsilon}$ dense dans $M_{\langle S_n\rangle}\exp C(\lambda(S))$.
$M_0 \lhd M_{\langle S_n\rangle} \lhd M_\Gamma \lhd M$ sont tous d'indice finis ! Famille de 'cônes' $\exp C(\lambda(S))M_{\langle S_n\rangle}\hat{m}$ où $\hat{m} \in M_\Gamma/M_{\langle S_n\rangle}$ qui se chevauchent dans A^{++}.

Merci de votre attention !