Activités d'enseignement, de recherche, d'administration et responsabilités collectives

1 Activités de recherche

Mes activités de recherche relient les systèmes dynamiques, les groupes de Lie semisimples et les actions de groupes. J'étudie la dynamique d'actions de groupes dans des espaces homogènes, c'est-à-dire les propriétés chaotiques de flots ou de groupes agissant sur des quotients de groupes de Lie.

Fixons un groupe de Lie G, réel linéaire, connexe, semisimple, de type non-compact, éventuellement de rang supérieur, par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ où $n \geq 3$. Soit Γ un sous-groupe discret de G, pas forcément un réseau, H un sous-groupe fermé connexe de G et $\phi^t \subset H$ un sous-groupe à un paramètre. On peut se demander quels sont les ensembles fermés invariants minimaux pour les actions $\Gamma\backslash G \curvearrowleft \phi^t$ et $\Gamma \curvearrowright G/H$ et s'ils coïncident avec ceux où la dynamique revient infiniment souvent dans un compact. Une fois qu'on s'est placé dans un bon ensemble, on peut étudier le comportements des orbites : si elles sont fermées ou denses dans des sous-ensembles invariants et enfin, s'il y a mélange topologique, c'est-à-dire si pour tout couple ouvert non vide, il existe un instant à partir duquel le système dynamique va à mélanger le premier ouvert dans l'espace de sorte à toujours intersecter le second.

J'utilise la théorie des marches aléatoires sur les groupes de Lie, l'intuition venant des espaces symétriques de courbure négative ou nulle ainsi que les outils venant de la théorie ergodique en volume fini ou infini pour mieux comprendre ces actions.

Lorsque le quotient $\Gamma\backslash G$ est de volume fini, l'approche par la théorie des représentations unitaires sur les groupes de Lie fournit de nombreux résultats. Le théorème de Howe-Moore permet d'en déduire que pour tout réseau irréductible Γ de G, pour tout sous-groupe fermé non compact H, l'action est mélangeante pour la mesure de Haar. En particulier, puisque celle-ci charge les ouverts, elle est topologiquement mélangeante.

Considérons un tore déployé maximal ou sous-groupe de Cartan A de G, un sous-groupe compact maximal K, un sous-groupe unipotent N, une A^+ chambre de Weyl, tels qu'on dispose d'une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ et de Cartan $G = KA^+K$. Notons A^{++} l'intérieur de la chambre de Weyl et M le sous-groupe centralisateur de A dans K, ainsi que $\mathfrak{a}$ le sous-espace de Cartan associé à A et $\mathfrak{a}^+ := \log A^+$. Une grande partie de ma thèse porte sur les actions de sous-groupes à un paramètres particuliers de A sur $\Gamma\backslash G$ et $\Gamma\backslash G/M$, les flots des chambres de Weyl. Ce sont les flots $(\phi_\theta^t)_{t\in\mathbb{R}} := \exp(\mathbb{R}\theta)$ paramétrés par des éléments non nuls $\theta \in \mathfrak{a}^+$ de la chambre de Weyl. Rappelons que le rang de G est la dimension de A.

Lorsque $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, alors $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$ et l'action du flot des chambres de Weyl ϕ_1^t sur $\Gamma\backslash G/M$ s'identifie à l'action du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la surface hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$. Celle-ci a été fortement étudiée entre autres par Hopf, Anosov, Bowen, Patterson, Sullivan, Margulis, Eberlein... En particulier, d'après F. Dal'bo [Dal00], le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur son ensemble non errant si et seulement si le spectre des longueurs de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ est non-arithmétique. Cette dernière condition est vérifiée lorsque Γ est Zariski dense (Cf Y.

Benoist [Ben00] et I. Kim [Kim06]). Plaçons-nous maintenant en rang supérieur, i.e. $\dim A \geq 2$, et supposons que Γ est discret, Zariski dense de covolume infini.

Les projections suivantes jouent le même rôle que la distance au point base dans le plan hyperbolique et la longueur de translation d'une isométrie de $\mathbb{H}^2$. Par décomposition de Cartan, pour tout $g \in G$, il existe un unique élément $\kappa(g) \in \mathfrak{a}^+$ tel que $g \in Ke^{\kappa(g)}K$. L'application ainsi définie $\kappa : G \to \mathfrak{a}^+$ est la Cartan projection de Cartan. La projection de Jordan projection est l'application $\lambda : G \to \mathfrak{a}^+$ qui encode le spectre des éléments de G.

Dans un article de 1997 [Ben97], Y. Benoist étudie pour tout sous-semigroupe Γ, son cône limite maintenant appelé *cône de Benoist*, le plus petit cône fermé de $\mathfrak{a}^+$ contenant $\lambda(\Gamma)$. On le note

$$\mathcal{C}(\Gamma) := \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)}.$$

Il prouve que lorsque Γ est Zariski dense, son cône de Benoist est un fermé convexe d'intérieur non vide.

Mes travaux comportent deux types de résultats reliés au cône limite, l'un porte sur les marches aléatoires l'autre sur les flots des chambres de Weyl.

1.1 Marches aléatoires

Soit μ une mesure de probabilité sur G. Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d de loi μ. Le comportement des produits de matrices aléatoires $(X_1...X_n)_{n\geq 1}$, dans les décompositions usuelles ainsi qu'en projection de Cartan et Jordan ont intéressé entre autres Furstenberg, Kesten, Oseledets, Kifer, Goldsheid, Guivarc'h, Margulis, Le Page, Raugi, Conze, Bougerol...

Le théorème de Furstenberg-Kesten décrit la croissance exponentielle des valeurs singulières des produits de matrices aléatoires [FK60]. Soit μ une mesure de probabilité à support Zariski dense dans G de premier moment fini (i.e. tel que $\int_G \|\kappa(g)\| d\mu(g) < +\infty$), alors

$$\frac{1}{n}\kappa(X_n...X_1) \underset{n\to+\infty}{\overset{a.s.}{\longrightarrow}} \overrightarrow{\lambda}_\mu \in \mathfrak{a}^+.$$

La limite $\overrightarrow{\lambda}_\mu$ ainsi définie est le *vecteur de Lyapunov* de la marche aléatoire i.i.d de loi μ. Notons $\mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$ l'ensemble des mesures de probabilités à support dans Γ, dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense et de premier moment fini. Notons $\mathcal{M}^2_Z(\Gamma)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur G à support dans Γ, dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense et de second moment fini (i.e. tel que $\int_G \|\kappa(g)\|^2 d\mu(g) < +\infty$). Ç. Sert a prouvé dans sa thèse [Ser16] que pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^2_Z(\Gamma)$, alors

$$\overrightarrow{\lambda}_\mu \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma_\mu).$$

J'ai réalisé l'intérieur du cône limite par des vecteurs de Lyapunov.

Theorem 1.1. *Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense, discret de G. Alors l'application (continue)*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\lambda} : \mathcal{M}^2_Z(\Gamma) &\longrightarrow \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \overrightarrow{\lambda}_\mu \end{aligned}$$

est surjective.

1.2 Dynamique du flot des chambres de Weyl

Relions maintenant le comportement du flot des chambre de Weyl au cône limite.

Theorem 1.2. *Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense, discret de G et $\theta \in \mathfrak{a}^+$. Alors*

1.) S'il existe une ϕ_θ^t-orbite non-divergente, alors $\theta \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

2.) S'il existe une ϕ_θ^t-orbite dense dans sa $A-$orbite et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, alors θ est dans l'intérieur du cône limite.

En rang supérieur et volume infini, J-P. Conze - Y. Guivarc'h dans [CG02], construisent pour $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ un sous-ensemble fermé $A-$invariant naturel $\Omega \subset \Gamma\backslash G/M$. Ils prouvent qu'il existe des $A-$orbites denses dans Ω. Cet ensemble est une généralisation de l'ensemble non-errant pour le flot géodésique dans $T^1\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$. Dans le cas des sous-groupes Ping-Pong de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, X. Thirion [Thi09] prouve le mélange pour une mesure de Radon de support Ω pour le flot défini par le "vecteur de croissance" introduit par J-F. Quint dans [Qui02]. A. Sambarino [Sam15] a lui aussi obtenu des résultats de mélange en mesure pour les images des représentations hyperconvexes dans des groupes de Lie semisimples.

Avec O. Glorieux, nous obtenons le théorème suivant.

Theorem 1.3 ([DG18])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense, discret de G et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.*

Alors le système dynamique (Ω, ϕ_t^θ) est topologiquement mélangeant si et seulement si θ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Notons Ω_G la préimage dans $\Gamma\backslash G$ du sous-ensemble Ω par la projection $\Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash G/M$. Dans ma thèse et dans un papier en cours d'écriture, je généralise le critère de mélange obtenu avec O. Glorieux à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{S0}(p,p+2)^0$ et plus généralement à tout groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple de type non-compact tel que M est abélien. Je l'énonce ci-dessous lorsque M est abélien et connexe.

Theorem 1.4. *Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense, discret de G et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$. Supposons que M est* abélien et connexe.

Alors le système dynamique $(\Omega_G, \phi_t^\theta)$ est topologiquement mélangeant si et seulement si θ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.

2 Activités d'enseignement

Pendant ma thèse à l'Université de Rennes 1, j'ai enseigné chaque année au moins 64h de travaux dirigés (TD) et travaux pratiques (TP).

J'ai assuré des TD d'Analyse pour des étudiants de L1 en Biologie, en 2016-2017 sous la responsabilité de Stéphane Balac et les deux années suivantes sous la responsabilité de Christophe Dupont. Les TD portaient d'abord sur la dérivation et les calculs de limites, ensuite sur le calcul intégral (intégration par parties, primitives, changement de variable), enfin sur les équations aux dérivées ordinaires linéaires, en particulier les différentes méthodes de résolution (variation de la constante, méthode polynômiale). Joint à ces TD, j'ai assuré des TP sur python, sous la responsabilité de Valérie Monbet. Ceux-ci comportaient les instructions conditionnelles (if) et les boucles for, les graphiques et importations de données.

Au second semestre de ma première année de thèse, j'ai donné des TD d'Analyse sur les suites et séries aux premières années de Licence en mathématiques, sous la responsabilité d'Anna Lenzhen. Le programme comportait entre autres les définitions quantitatives de convergence des suites, des études de suites récurrentes et les critères de convergence absolue des séries à valeurs réelles ou complexes.

Au second semestre des deux dernières années de ma thèse, j'ai enseigné sous la responsabilité de Stéphane Leborgne des TD d'Analyse pour les premières années de Licence en mathématique et informatique appliqués aux sciences humaines sociales (MIASHS). La première partie portait sur les sommes de Riemann et calculs d'aires, la seconde sur les techniques usuelles d'intégration, primitives, intégrations par parties et changements de variables. Enfin, les dernières séances de TD portaient sur les intégrales généralisées, en particulier sur les critères de convergence absolue et de comparaison.

3 Responsabilités collectives

Pendant ma deuxième année de thèse, j'ai été avec Camille Francini, co-responsable du séminaire d'algèbre et de géométrie des doctorants et doctorantes rennais. Nous y avons invité plusieurs doctorants venant d'ailleurs, Nantes, Marseilles, Orsay, Oxford, Dakar...

Pendant mes deux premières années de thèse, j'ai encadré des lycéens (et lycéennes) en petits groupes sur un problème de graphe planaire et sur la forme de la Terre lors des stages Math C2+. En 2018, j'ai aussi encadré des lycéennes au Rendez-vous des Jeunes Mathématiciennes de l'Ouest sur un problème des graphes planaires et j'ai pu échanger avec elles sur mon parcours lors d'un speed-meeting.

Enfin, j'ai co-animé le stand de l'IRMAR aux fêtes de la Sciences à Rennes en 2017 et 2018.

References

[Ben97] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. *Geom. Funct. Anal.*, 7(1):1–47, 1997.

[Ben00] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. II. In *Analysis on homogeneous spaces and representation theory of Lie groups, Okayama–Kyoto (1997)*, volume 26 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 33–48. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.

[CG02] J-P. Conze and Y. Guivarc'h. Densité d'orbites d'actions de groupes linéaires et propriétés d'équidistribution de marches aléatoires. In *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, pages 39–76. Springer, Berlin, 2002.

[Dal00] F. Dal'bo. Topologie du feuilletage fortement stable. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3):981–993, 2000.

[DG18] N.-T. Dang and O. Glorieux. Topological mixing of the Weyl chamber flow. *ArXiv e-prints*, September 2018.

[FK60] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31:457–469, 1960.

[Kim06] I. Kim. Length spectrum in rank one symmetric space is not arithmetic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(12):3691–3696, 2006.

[Qui02] Jean-François Quint. Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 77(3):563–608, 2002.

[Sam15] A. Sambarino. The orbital counting problem for hyperconvex representations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(4):1755–1797, 2015.

[Ser16] Ç. Sert. *Joint Spectrum and Large Deviation Principles for Random Matrix Products.* PhD thesis, Paris-Saclay, Université, 2016.

[Thi09] X. Thirion. Propriétés de mélange du flot des chambres de Weyl des groupes de ping-pong. *Bull. Soc. Math. France*, 137(3):387–421, 2009.