Mélange topologique de flots diagonaux positifs

Nguyen-Thi Dang

Séminaire francophone, 15 avril 2021

MATHEMATISCHES INSTITUT

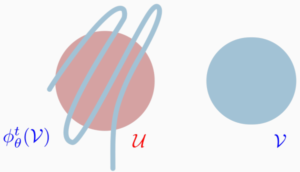
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Plan de l'exposé

Mélange topologique :

$\Omega \curvearrowleft \phi^t$ est *topologiquement mélangeante* si pour tout $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \Omega$, il existe $T > 0$ tel que $\phi^t(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ pour tout $t \geq T$.



Flots diagonaux positifs

G groupe de Lie semisimple de type non-compact et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret.

Flots diagonaux

Toute action non-triviale $\Gamma\backslash G \curvearrowleft (a_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset A$ d'un tore déployé maximal A.

$\mathfrak{a} := Lie(A)$, choisissons $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl positive fermée, $\mathfrak{a}^{++}$ son intérieur.

Paramétrisation

Pour tout $\theta \in \mathfrak{a}$, on pose $\phi_\theta^t(\Gamma g) := \Gamma g e^{t\theta}$. Lorsque $\theta \in \mathfrak{a}^+$ non nul, ϕ_θ^t est un flot *diagonal positif*, *strictement positif* si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.

Soit M le sous-groupe compact tel que $AM = Z_G(A)$ et M_0 sa composante connexe en l'identité.

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SO}(n,1)_0$
$diag(e^{t_1}, ..., e^{t_n})$, $\sum_{i=1}^n t_i = 0$	$\left(\begin{pmatrix} e^t & & \\ & 1_{n-1} & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix}\right)_{t\in\mathbb{R}}$
$diag(t_1, ..., t_n)$, $t_1 \geq ... \geq t_n$	$\left(\begin{pmatrix} t & & \\ & 0_{n-1} & \\ & & -t \end{pmatrix}\right)_{t\geq 0}$
$diag(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\varepsilon_1 ... \varepsilon_n = 1$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mathrm{SO}_{n-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Flot diagonal $\Gamma\backslash G \curvearrowleft \phi_\theta^t \longrightarrow \Gamma\backslash G/M \curvearrowleft \phi_\theta^t$ flot des chambres de Weyl.

$\mathrm{SO}(n,1)^0$ flot des repères — flot géodésique

Résultat

Théorème (préprint soumis)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense. Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$, une partition $(\Omega_{[m]})_{[m]\in M/M_\Gamma}$ d'un fermé AM-invariant tel que

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;

(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m]\in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués ;

(c) si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $(\Omega_{[e]}, \phi^t_\theta)$ est topologiquement mélangeant alors $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$;

(d) lorsque M_0 est *abélien* et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, on a la réciproque de (c).

$\mathcal{B}(\Gamma) \subset \mathfrak{a}^+$ est le cône de Benoist de Γ, c'est un fermé, convexe d'intérieur non vide. CNS de mélange pour $\mathrm{SO}(p,q)_0$ avec $|p-q| \leq 2$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ ...

Γ réseau irréductible : Howe-Moore $\Rightarrow$ mélange sur $\Gamma\backslash G$

Flot des repères de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ i.e. $\Gamma\backslash\mathrm{SO}(n,1)_0 \curvearrowleft a_t$

Maucourant- Schapira (2019) : $\Gamma \subset G$ Zariski dense, alors le flot des repères est topologiquement mélangeant sur son ensemble non-errant. Winter (2016) Γ convexe cocompact.

Cône de Benoist

Décomposition de Jordan

g	$=$ g_e	g_h	g_u
partie	*elliptique*	*hyperbolique*	*unipotente*
qui commutent	$\subset$ compact max	$\subset$ tore déployé max	$\subset$ unipotent max

Définition

Projection de Jordan, $g \in G \mapsto \lambda(g) \in \mathfrak{a}^+$ unique élément tel que $g_h \sim e^{\lambda(g)}$.

Lorsque $\lambda(g) \in \mathfrak{a}^{++}$, on dit que g est *loxodromique*.
Cône de Benoist $\mathcal{B}(\Gamma) := \overline{\cup_{\gamma\in\Gamma}\mathbb{R}_+\lambda(\gamma)}$.

Théorème (Benoist 97')

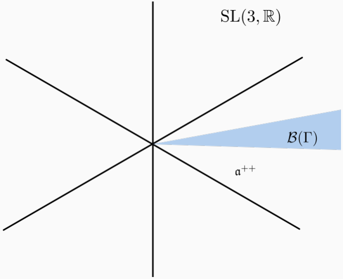
Lorsque Γ est Zariski dense, $\mathcal{B}(\Gamma)$ est un cône convexe fermé d'intérieur non vide.

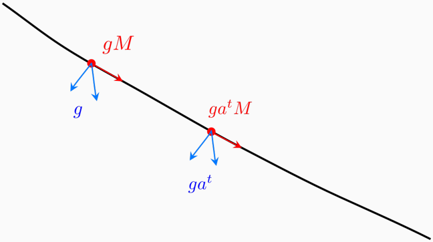
Loxodromiques de Γ
$\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$

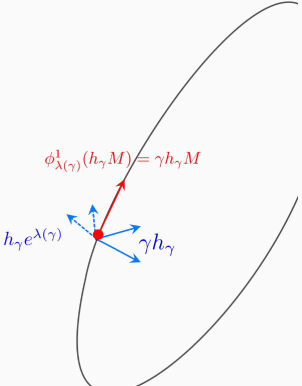
$\lambda(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++} \subset \mathcal{B}(\Gamma)$

Orbites périodiques dans $\Gamma\backslash G/M$
$\gamma h_\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} \in h_\gamma M e^{\lambda(g)}$

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma \backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.







Ensembles invariants

$\gamma \in \Gamma^{lox}$ alors $w = h_\gamma M$ est $\phi^t_{\lambda(\gamma)}$ périodique dans $\Gamma\backslash G/M$ où $\gamma = h_\gamma m_\gamma e^{\lambda(\gamma)} h_\gamma^{-1}$.

Dans $\Gamma\backslash G/M$

$$\Omega := \overline{\{wA \quad | \quad \theta \in \lambda(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++} \text{ et } \phi^t_\theta(w) \text{ périodique}\}}.$$

Notons $p_{G/M} : G/M \to \Gamma\backslash G/M$ et $p_G : G \to \Gamma\backslash G$, posons $\widetilde{\Omega} := p_{G/M}^{-1}(\Omega)$.
K (resp. N) sous-groupe compact (resp. unipotent) maximal tels que $G = KAN$.
Notons $\pi_{G/M} : G \to G/M$ et $\pi_K : K \to G/MAN$.

Théorème (Guivarc'h-Raugi 2007)

Soit Γ Zariski dense. Notons $L(\Gamma)$ l'ensemble limite pour l'action $\Gamma \curvearrowright G/MAN$.
Alors il existe un sous-groupe normal d'indice fini $M_0 \lhd M_\Gamma \lhd M$ et une partition en sous-ensembles Γ-invariants minimaux et M_Γ-invariants

$$\pi_K^{-1}\big(L(\Gamma)\big) = \sqcup_{[m]\in M/M_\Gamma} L_{[m]}(\Gamma) \subset K.$$

De plus, pour tout $m \in M$, on a $L_{[m]}(\Gamma) = L_{e_M}(\Gamma)m$.

$\pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ est AM-invariant à droite

Décomposition d'Iwasawa : $G = KAN$

Ensembles invariants de $\Gamma\backslash G$

Posons $\widetilde{\Omega}_{[m]} := L_{[m]}(\Gamma)AN \cap \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ et $\Omega_{[m]} := p_G(\widetilde{\Omega}_{[m]}) = \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_{[m]}$.

(a), (b) et (c)

$\widetilde{\Omega}_{[m]} := L_{[m]}(\Gamma)AN \cap \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ et
$\Omega_{[m]} := \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_{[m]}$.

Énoncés

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant ;

(b) les systèmes $\{(\Omega_{[m]}, \phi^t)\}_{[m]\in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux conjugués.

(a) Notons $\pi_{G/AM} : G/M \to G/AM$.

Conze-Guivarc'h (2000), D.-Glorieux (2020)

$\Gamma \curvearrowright \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})$ a des orbites denses.

$\Rightarrow \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$ est Γ-invariant et AM-invariant.
GR07 : $L_{[m]}(\Gamma)$ est Γ-invariant et M_Γ-invariant.
M normalise AN.

(b) GR07 : $L_{[m]}(\Gamma) = L_{e_M}(\Gamma)m$ et $M \subset Z_G(A)$.

Condition nécessaire

(c) si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $(\Omega_{[e]}, \phi_\theta^t)$ est topologiquement mélangeant alors $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$

$\pi_{G/M}(\Omega_{[e]}) = \Omega \curvearrowleft \phi_\theta^t$ est topologiquement mélangeant.

Théorème (D.-Glorieux)

Soit G un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ discret, Zariski dense et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.

Alors $\Omega \curvearrowleft \phi_\theta^t$ est topologiquement mélangeant ssi θ est dans l'intérieur du cône de Benoist.

Réciproque

Fixons $\theta \in \mathring{\mathcal{B}}(\Gamma)$.

Énoncé de mélange

Pour tout $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subset \widetilde{\Omega}_{[e_M]}$ ouverts non vides, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que $\widetilde{U} e^{t\theta} \cap \gamma_t \widetilde{V} \neq \emptyset$

• Fixer des sections locales $s_1, s_2 : G \to G/AM$ définis $O_1^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$ et $O_2^{\pm} \supset \pi_{G/AM}(\widetilde{U})$. En utilisant les décompositions de Bruhat et d'Iwasawa.

Énoncé (bis)

$U^{\pm} \times U_{AM} \subset \left(O_1^{\pm} \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_{\Gamma}$ et $V^{\pm} \times V_{AM} \subset \left(O_2^{\pm} \cap \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})\right) \times AM_{\Gamma}$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ tel que
$s_1(U^{\pm}) U_{AM} e^{t\theta} \cap \gamma_t s_2(V^{\pm}) V_{AM} \neq \emptyset$.

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_t s_V = s_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1},$$

avec $(s_V, s_U) \subset s_1(U^{\pm}) \times s_2(V^{\pm})$.

Conze-Guivarc'h (2000), D.-Glorieux (2020)

$\Gamma \curvearrowright \pi_{G/AM}(\widetilde{\Omega})$ a des orbites denses.

$\Rightarrow$ On va pouvoir supposer $s_U = s_V$ et on va chercher

$$\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \ ; \ h_U \in s_U\}.$$

Lorsque t est grand,
$e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} \in A^{++} M_{\Gamma} \Rightarrow \gamma_t$ est loxodromique.

Produit d'éléments loxodromiques cas abélien

On va chercher $\gamma_t \in \Gamma$ loxodromique tel que $\gamma_t \in \{h_U e^{t\theta} U_{AM} V_{AM}^{-1} h_U^{-1} \ ; \ h_U \in s_U\}$.

Pour tout $g \in G^{lox}$, il existe $h_g \in G$ tel que $gh_g \in e^{\lambda(g)} M h_g$ et h_g est défini modulo multiplication à droite par AM.

Projection de Jordan généralisée

Pour tout $g \in G^{lox}$ et h_g qui diagonalise g, on définit

$$\mathcal{L}(g) := h_g^{-1} \, g \, h_g \in M e^{\lambda(g)}.$$

G/AM s'identifie à l'espace des couples de points transverses de G/MAN.
$h_g \leftrightarrow g^{\pm}$ couple de drapeaux attractif et répulsif pour $g \curvearrowright G/MAN$.

Proposition

Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g_k, ..., g_1 \in G$ des éléments (r, ε)-loxodromiques et r-génériques. Il existe $\mathcal{R}_k, ..., \mathcal{R}_1 \in AM$ tels que pour tout $n_k, ..., n_1 \geq 1$

$$\mathcal{L}(g_k^{n_k} ... g_1^{n_1}) \overset{I\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}(g_k)^{n_k} \mathcal{R}_k ... \mathcal{L}(g_1)^{n_1} \mathcal{R}_1,$$

et $g = g_k^{n_k} ... g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)$-loxodromique avec $(g^+, g^-) \in B(g_k^+, \varepsilon) \times B(g_1^-, \varepsilon)$.

Cas $Z_G(A)$ abélien

$$\mathcal{L}(g_k^{n_k}...g_1^{n_1}) \overset{l\delta_{r,\varepsilon}}{\simeq} \mathcal{L}(g_k)^{n_k}\mathcal{R}_k...\mathcal{L}(g_1)^{n_1}\mathcal{R}_1,$$

$\mathcal{L} : G^{lox} \to M\exp(\mathfrak{a}^{++})$ projection de Jordan généralisée.

Théorème Guivarc'h-Raugi (2007)

Γ Zariski dense. Alors $\overline{\langle \mathcal{L}(\Gamma^{lox}) \rangle} = AM_\Gamma$.

Proposition Benoist (1997)

Soit Γ Zariski dense et θ de l'intérieur de $\mathcal{B}(\Gamma)$. Alors il existe un système de générateurs r-générique $S \subset \Gamma$ et $\varepsilon_n \to 0$ tels que

- θ est dans l'intérieur du cône polygonal non dégénéré engendré par $\lambda(S)$.
- Pour tout $n \geq 1$, la famille S_n d'éléments (r, ε_n)-loxodromiques et r-génériques engendre un Schottky Zariski dense.

Remplir chaque composante connexe $n \geq 1$ posons le $\Gamma/\langle S_n \rangle$ revêtement
$\langle S_n \rangle \backslash G \supset \widehat{\Omega}_{[e_M]} \curvearrowleft \phi_\theta^t \longrightarrow \Omega_{[e_M]} \curvearrowleft \phi_\theta^t$.
Prop + G-R + Prop $\Rightarrow \mathcal{L}(g_k^{n_k}...g_1^{n_1})$ est $l\delta_{r,\varepsilon}$ dense dans $M_{\langle S_n \rangle} \exp C(\lambda(S))$.

Chevauchement de cônes $M_0 \triangleleft M_{\langle S_n \rangle} \triangleleft M_\Gamma \triangleleft M$ sont tous d'indice finis ! Famille de 'cônes' $\exp C(\lambda(S)) M_{\langle S_n \rangle} \hat{m}$ où $\hat{m} \in M_\Gamma / M_{\langle S_n \rangle}$ qui se chevauchent dans A^{++}.

Merci de votre attention !