THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE RENNES 1
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601
Mathématique et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs interactions*

Par

Nguyen-Thi DANG

Dynamique d'action de groupes dans des espaces homogènes de rang supérieur et de volume infini

Thèse présentée à RENNES, le 23 Septembre 2019
Unité de recherche : IRMAR, UMR CNRS 6625

Rapporteurs avant soutenance :

Emmanuel BREUILLARD	Professeur à l'Université de Cambridge
Gilles COURTOIS	Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Pierre et Marie Curie

Composition du jury :

Yves BENOIST	Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Paris-Sud
Gilles COURTOIS	Directeur de Recherche CNRS à l'Université de Pierre et Marie Curie
Yves GUIVARC'H	Professeur émérite à l'Université de Rennes 1
Livio FLAMINIO	Professeur à l'Université de Lille
Ludovic MARQUIS	Maître de Conférences à l'Université de Rennes 1
François MAUCOURANT	Maître de Conférences à l'Université de Rennes 1
Andrés SAMBARINO	Chargé de Recherche CNRS à l'Université de Pierre et Marie Curie
Barbara SCHAPIRA	Maîtresse de Conférences à l'Université de Rennes 1

Dir. de thèse : François MAUCOURANT — Maître de Conférences à l'Université de Rennes 1 / *HDR*

Dir. de thèse : Barbara SCHAPIRA — Maîtresse de conférences à l'Université de Rennes 1 / *HDR*

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Gilles Courtois et Emmanuel Breuillard d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Gilles m'a très généreusement invité à Jussieu pendant quelques jours et grâce à ses remarques, j'ai pû améliorer ce manuscript.

Je le remercie aussi ainsi qu'Yves Benoist, Livio Flaminio, Yves Guivarc'h, Ludovic Marquis, Andrés Sambarino d'avoir accepté de faire partie de mon jury. La présence des deux Yves me touche particulièrement puisque cette thèse est centrée sur plusieurs de leurs travaux.

Cette thèse doit énormément à Barbara Schapira et François Maucourant tant sur les aspects humains que mathématiques. Tout au long de cette thèse, Barbara et François m'ont sans cesse motivée (aussi pour les tâches administratives), ont toujours été disponibles pour les aspects techniques et mathématiques. Je les remercie d'avoir toujours relu minutieusement, rigoureusement et avec abnégation tous mes énoncés parfois mals conçus et preuves parfois bien bancales. J'ai pu ainsi profiter de leur grande rigueur ainsi que de leur expérience en rédaction autant en Anglais qu'en Français. Par leurs commentaires et conseils très francs sur la préparation d'exposés et de dossiers de candidatures, j'ai pû énormément améliorer les miens. Ils ont sû me redynamiser et me déstresser dans les moments les plus difficiles où je me sentais perdue et se sont toujours montrés à l'écoute de toute exposition plus ou moins bancale de preuves. Leur grand enthousiasme, leurs encouragements et leurs questions m'ont énormément permis de progresser en temps que mathématicienne.

Sans la gentillesse et l'aide d'Aude Guigny, Marie-Aude Verger, Chantal Halet, Cristelle Innocenti, Florian Rogovski cette thèse ne se serait pas aussi bien déroulée administrativement. Je les remercie pour leur efficacité, patience, disponibilité et leur sourire.

Durant cette thèse, j'ai pû enseigner aux côtés d'Ania Lenzhen, Bert Wiest en Analyse, Christophe Dupont, Stéphane Balac et Françoise Dal'bo en TD d'Analyse pour les L1 Biologie et Valérie Monbet pour les TP sur python, enfin Stéphane Leborgne et Jésus David à Rennes 2. Je leur remercie pour leurs encouragements, écoute et patience quant à la gestion des remplacements.

D'un point de vue mathématique, l'équipe de théorie ergodique composée de Ludovic Marquis, Bachir Bekka, Serge Cantat, Junyi Xie, Vincent Guirardel, Jean-Pierre Conze, Yves Guivarc'h, Juliette Bavard, Rémi Coulon, Juan Souto, Ania Lenzhen, Victor Klepsyn, Françoise Dal'bo, Bert Wiest, Christophe Dupont ainsi que Barbara et François, est très dynamique et j'ai pû profiter en première année d'un excellent cours de théorie ergodique de Serge et François et d'un non moins excellent cours de théorie ergodique des actions de groupes de Bachir Bekka ainsi que d'un cours doctoral de Rémi. La richesse des sujets abordés aux séminaires de l'équipe ainsi qu'aux groupes de travails m'ont permis de développer une culture mathématique variée. Un grand merci Miguel Rodriguez de m'avoir encadrée pour mon exposé aux Journées Louis Antoine et Vincent Duchêne pour avoir assisté aux répétitions.

Je remercie Fanny Kassel d'avoir accepté d'encadrer mon mémoire de M2 à Lille et redirigé vers Barbara et François, de me rassurer et m'encourager dans tout ce que j'entreprends depuis et pour ses conseils d'exposés en anglais. Je remercie Olivier Guichard pour cette discussion à Strasbourg et Alix Deleporte pour l'invitation au séminaire des doctorants de Strasbourg et pour finir mes demi-pintes. Je remercie Samuel Tapie pour son grand enthousiasme et sa disponibilité lors de son invitation au séminaire de Géométrie de Nantes et pour cette discussion sur le rang supérieur, Sébastien Gouëzel pour m'avoir très efficacement rassurée et encouragée avant mon premier exposé de deux heures à Orsay et Colin Guillarmou pour m'avoir invitée à donner cet exposé. Je remercie Françoise Pène pour ce cours de système dynamique en première année de thèse, la photo de ma page web et l'invitation au séminaire commun de Brest et Vannes à Quimper.

Un grand merci à Olivier Glorieux, à qui j'ai montré le tour de magie de la flûte de champagne et pour avoir accepté d'écrire ensemble mon premier article, malgré mon incapacité à utiliser la Dropbox. Cette thèse doit aussi à Çagri Sert, qui est pour moi une sorte de grand frère mathématique hyper enthousiaste et très inspirant. Il m'a encouragé et m'a aidé à améliorer plusieurs résultats, posé les bonnes questions, parfois autour de verres en ponctuant par "ça va ?" La formulation de mon premier théorème provient en effet d'une discussion (arrosée) avec Richard Aoun et Çagri, je les remercie pour leur bonne humeur. Un grand merci à mon grand frère mathématique Filipe Riquelme qui m'a beaucoup encouragé quand il est passé pendant un mois et demi, a si gentiment exposé ses résultats et m'a expliqué le déroulement de sa thèse et pour toute son aide lors de mon stage de M1.

Cette thèse ne se serait pas aussi bien déroulée sans l'ambiance chez les doctorants rennais, surtout chez les joueuses et joueurs de société du midi, un grand merci aux doctorants du bureau 333 pour leur (trop) grande générosité Camille, Florian, Hélène, Blandine, Jésus, Fabrice, ainsi que les habitués Tom Tom, Cyril, Mercedès, Chloé, Florian, Hélène, Blandine, Professeur Rogue, Thibault, Tristan, Marine et Adrien Fontaine, Alexandre pour leurs nombreux gâteaux, tuyaux et l'ambiance. Une mention au Professeur Rogue qui m'a appris ce qu'est un gallopin et qui m'a initié à plusieurs jeux de sociétés et à Maria qui m'a fait découvrir *Tea & Ty* ainsi que les assidus du Pampers Tom Tom, Cyril, Arame, Mercedès, Maria, Clément et toutes celles et ceux que j'oublie lorsque Camille et moi étaients organisatrices. Enfin, un grand merci aux co-bureaux qui m'ont très bien accueilli en milieu de première année et qui m'ont ensuite bien supporté, Tristan qui m'a plusieurs fois accompagné à Modjo et sa bonne humeur, Arnaud qui m'a beaucoup aidé sur les questions de latex et administratives et Ninon puis Thibault pour son partage de petits gâteaux. Un grand merci aux thésards de l'équipe, Sheng Yuan, Simon, Camille et Chloé, les mathématiciennes de l'apéro, Éliza, Olga, Juliette et toutes celles que j'ai oubliées qui m'ont été d'un grand soutien dans la dernière ligne droite de la rédaction de ma thèse.

Je remercie Viet le super Dad, maintenant aux petits soins de Tho et Hoàng My, Bac le barroudeur, de continuer à me supporter et de me conseiller, pour avoir apprécié mes premiers essais culinaires pendant qu'ils (ne) réussissaient (pas trop) les soudures de leur ampli. Ajoutons à ce duo de choc, Vo An mon cousin préféré pour tous ces moments d'entente devant les meilleurs films du monde (Transformers, Pacific Rim ...). Six mois avant le début de ma thèse, Maman a ouvert *Saveurs Lointaines*, mais avant cela elle m'a donné le goût des bonnes choses, m'a encouragé à sa manière et est toujours de bon conseil. Elle poursuit encore avec le soutien indéfectible de Papa cette épreuve de courage et de volonté. Je remercie Colette et Michel pour m'avoir fait découvrir la randonnée, le Sud-Ouest et le pied des Pyrénés, pour leur bonne humeur et générosité lors du voyage à Basel et Saint-Malo et pour m'avoir toujours demandé (sans stress, hein ?) où en était ma thèse et quand je soutiendrai. Marie-Joe m'a fait découvrir les joies (et courbatures) de la randonnée en montage, je la remercie ainsi que Marie-Hélène pour leur sens de l'organisation ainsi que pour ces moments agréables à Rennes et dans les Pyrénées, en particulier pour cette randonnée avec les LPCs, où je suis descendue sur les rotules après une gorgée de Moscatel sous le glacier (d'autres avaient pris des bières en plus de l'apéro). Un grand merci à Amélie, Yoann et le petit Victor pour toutes ces parties de jeux de société. Je remercie Vincent pour m'avoir assuré après m'avoir poussé dans l'escalade, pour tous ces moments où on s'est rattrappés en cuisine, en montage de meuble, en organisation de vadrouille express (Quiberon, Dol, le Verger) et pour ce grand soupir lorsque j'ai posé la dégaine à trois mètre au-dessus du sol et enfin d'être lui-même et de m'accompagner depuis près de 7 ans. Un pensée émue à Mamie Renée qui nous a quitté il y a plus d'un an et demi, pour m'avoir appris la patience, pour m'avoir toujours encouragée (même si elle trouvait bizarre que je fasse des maths), appris la confiance en soi et pour cette recette de gelée de pommes.

Sommaire

1 Introduction **1**

1.1 Contexte . . . 2

1.2 Le cône limite . . . 3

1.3 Plan de la thèse . . . 4

2 Groupes de Lie, exemples et éléments loxodromiques **7**

2.1 Groupes de Lie et espaces symétriques . . . 7

2.1.1 Espaces symétriques . . . 8

2.1.2 Algèbres de Lie réelles . . . 8

2.1.3 Théorèmes de structure . . . 10

2.2 Théorèmes de décomposition . . . 11

2.2.1 Décomposition de Cartan . . . 11

2.2.2 Décompositions d'Iwasawa et de Bruhat . . . 12

2.2.3 Décomposition de Jordan . . . 18

2.2.4 Calculs explicites de décompositions . . . 20

2.3 Éléments loxodromiques . . . 20

2.3.1 Proximalité dans $\mathrm{GL}(V)$ . . . 20

2.3.2 Représentations d'un groupe de Lie semisimple . . . 32

2.3.3 Produits d'éléments loxodromiques . . . 36

3 Un résultat de marche aléatoire **41**

3.1 Le vecteur de Lyapunov . . . 43

3.1.1 Mesures et moments . . . 43

3.1.2 Continuité du vecteur de Lyapunov par rapport à la mesure . . . 45

3.2 Hypothèse de déviation et Théorème de localisation . . . 46

3.2.1 Hypothèse de déviation . . . 47

3.2.2 Preuve du Théorème de localisation . . . 48

3.3 Une estimation fine du vecteur de Lyapunov . . . 49

3.3.1 Densité projective des vecteurs de Lyapunov . . . 50

3.3.2 Le lemme d'estimation . . . 51

3.4 Le théorème de surjectivité . . . 54

3.4.1 Une construction de sous-semigroupes Schottky . . . 55

3.4.2 Un lemme de convexité . . . 57

3.4.3 Un Lemme de nature topologique . . . 60

3.4.4 Preuve de la Proposition 3.22 . . . 61

3.5 Le théorème de surjectivité de Ç. Sert et E. Breuillard . . . 64

3.5.1 Le spectre joint et le cône limite de Benoist . . . 64

3.5.2 Le résultat de surjectivité de Ç Sert et E. Breuillard . . . 66

4 Coordonnées de Hopf et Bruhat-Hopf **69**
4.1 Coordonnées de Hopf sur G/M . . . 71
4.1.1 Plats paramétrés, espace des chambre de Weyl . . . 71
4.1.2 Chambres de Weyl asymptotiques, bord de Furstenberg . . . 75
4.1.3 Paramétrisation de Hopf . . . 77
4.2 Coordonnées globales d'Iwasawa-Hopf de G . . . 78
4.2.1 Action de G sur K . . . 78
4.2.2 Coordonnées d'Iwasawa de G/A . . . 79
4.2.3 Coordonnées d'Iwasawa-Hopf . . . 82
4.3 Coordonnées de Bruhat-Hopf sur G . . . 84
4.3.1 Sections de Bruhat du bord de Furstenberg . . . 84
4.3.2 Cartes de Bruhat de K et cocycle à valeurs dans M . . . 88
4.3.3 Coordonnées locales de G . . . 93
4.4 Produits d'éléments loxodromiques . . . 98
4.4.1 Généralisation de la projection de Jordan . . . 98
4.4.2 Cocycle dans M d'un élément loxodromique . . . 100
4.4.3 Une estimée du cocycle . . . 103
4.4.4 Cocycle généralisé d'éléments loxodromiques . . . 105
4.4.5 Projection de Jordan généralisée d'un produit d'éléments loxodromiques . . . 108

5 Théorèmes de transitivité topologique **111**
5.1 Un théorème sur les orbites des flots directionnels . . . 112
5.2 Ensemble $\Gamma-$invariant et transitivité topologique . . . 118
5.2.1 Ensemble limite du bord de Furstenberg . . . 118
5.2.2 Transitivité topologique sur G/AM . . . 119
5.2.3 Transitivité topologique sur G/M . . . 119
5.3 Théorèmes de Guivarc'h-Raugi . . . 120
5.3.1 Propriétés du sous-groupe M_Γ . . . 121
5.3.2 Ensembles $\Gamma-$invariants de K . . . 121
5.4 Une partition de G en sous-ensembles Γ-invariants . . . 122

6 Théorèmes de mélange **125**
6.1 Mélange pour les réseaux . . . 127
6.2 Non-arithméticité des projections de Jordan . . . 127
6.2.1 Théorème de non-arithméticité d'Y. Benoist . . . 127
6.2.2 Lemmes de densité . . . 128
6.2.3 Densité des projections de Jordan d'éléments loxodromiques . . . 130
6.3 Mélange topologique du flot des chambres de Weyl . . . 133
6.4 Théorème de non-arithméticité d'Y. Guivarc'h et A. Raugi . . . 135
6.4.1 Lemme de densité . . . 136
6.4.2 Proposition de décorrélation . . . 137
6.4.3 Démonstration de la Proposition de décorrélation . . . 144
6.5 Mélange topologique du flot de translation . . . 149
6.5.1 Une condition suffisante de mélange . . . 149
6.5.2 Théorème de mélange topologique . . . 152
6.6 Transitivité topologique sur G/MN . . . 152
6.6.1 Coordonnées de G/MN et sous-ensemble $\Gamma-$invariant . . . 152
6.6.2 Transitivité topologique . . . 153

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse, on étudie l'action de sous-groupes à un paramètre de groupes de Lie sur des espaces homogènes, du point de vue de la dynamique topologique.

Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire et de type non-compact, c'est-à-dire qu'il n'admet pas de sous-groupes distingués euclidiens ou compacts, par exemple $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Soit Γ un sous-groupe discret de G et A un tore déployé maximal de G. On s'intéresse à l'action par multiplication à droite de A sur $\Gamma\backslash G$.

On peut se poser des questions de dynamique topologique sur l'action de A à droite sur les sous-ensembles fermés $A-$invariants non vides Ω de $\Gamma\backslash G$. Existe-t-il des orbites denses pour l'action de A sur Ω ?

Pour comprendre plus précisément l'action de A sur Ω, on peut s'intéresser aux propriétés de dynamique topologique des actions de sous-groupes à un paramètre de A sur Ω. En effet, si $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre de A i.e. un flot, on va non seulement pouvoir se demander s'il existe des orbites denses dans Ω pour ce flot mais aussi s'il est topologiquement mélangeant, c'est-à-dire si pour tout couple d'ouverts non vides de Ω, il existe un temps à partir duquel l'image du premier ouvert par ϕ^t va toujours intersecter le second.

Question 1. *Soit Ω un sous-ensemble fermé $A-$invariant non vide de $\Gamma\backslash G$. Soit $(\phi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ un sous-groupe à un paramètre de A.*

Le système dynamique topologique (Ω, ϕ^t) admet-il des orbites non-divergentes ? denses ? est-il topologiquement mélangeant ?

Considérons un sous-groupe compact maximal K et un sous-groupe unipotent maximal N de sorte qu'on ait une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. Notons M le centralisateur de A dans K, de sorte que A et M commutent. Notons $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de A et considérons une chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$. C'est un domaine fondamental pour l'action du normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. L'action de A et de sous-groupes à un paramètre de A par multiplication à droite sur G induit une action par multiplication à droite sur G/M. Dans cette thèse, on a aussi étudié l'action des sous-groupes à un paramètre de A sur $\Gamma\backslash G/M$.

La projection de Cartan $\kappa : G \to \mathfrak{a}^+$ d'un élément $g \in G$ est l'unique élément dans $\mathfrak{a}^+$ tel que $g \in Ke^{\kappa(g)}K$. La projection de Jordan $\lambda : G \to \mathfrak{a}^+$ encode les informations sur les valeurs propres des éléments de G, elle vérifie pour tout $g \in G$ la convergence suivante

$$\lim_{n+\infty} \frac{1}{n}\kappa(g^n) = \lambda(g).$$

1.1 Contexte

Dans le cas particulier où Γ est un réseau irréductible du groupe de Lie réel semisimple de type non-compact G, le Théorème de Howe-Moore permet d'obtenir le mélange topologique de tout sous-groupe à un paramètre non relativement compact de G.

On supposera dans cette thèse que $\Gamma\backslash G$ est de volume infini.

Supposons d'abord que $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Dans ce cas, G/M s'identifie au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$ du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. L'action par multiplication à droite de A sur G/M s'identifie à l'action du flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}^2$. Soit Γ un sous-groupe discret, non élémentaire de G agissant proprement discontinuement et librement sur $\mathbb{H}^2$. Les travaux par exemple de Hopf, Hedlund, Bowen, Margulis, Sullivan, Eberlein, Shub etc... ont permis de prouver que le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur son ensemble non-errant.

Supposons que $G = \mathrm{SO}(n,1)_0$ et Γ est un sous-groupe discret, Zariski dense de G. L'espace homogène G/M s'identifie au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^n$ de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ et G s'identifie au fibré des repères $\mathcal{F}\mathbb{H}^n$. L'action par multiplication à droite de A sur G s'identifie au flot des repères sur $\mathcal{F}\mathbb{H}^n$. Sur le quotient G/M, elle correspond à l'action du flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}^n$. Notons $\Omega \subset \Gamma\backslash G/M$ l'ensemble non-errant du flot géodésique, Ω_G son image réciproque par la projection $\Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash G/M$. D'après les travaux de D. Winter [Win15], F. Maucourant et B. Schapira [MS19], le flot des repères est topologiquement mélangeant sur Ω_G.

Le théorème suivant, dû à F. Dal'bo a fourni une stratégie globale pour prouver les résultats de mélange de cette thèse.

Théorème 2 (Théorème A [Dal00])**.** *Soit (X,d) une variété riemannienne connexe, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle est majorée par -1. Soit Γ un groupe d'isométries non-élémentaire agissant proprement discontinuement librement sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) Le sous-groupe engendré par les longueurs de translation des isométries hyperboliques de Γ est non-arithmétique.

(b) Le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur son ensemble non-errant $\Omega \subset T^1(\Gamma\backslash X)$.

D'après I. Kim [Kim06] et Y. Benoist [Ben00], lorsque Γ est un sous-groupe Zariski dense de G, la condition (a) est vérifiée. On peut appliquer le théorème précédent sur les espaces symétriques de la forme G/K lorsque G est un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact pour lequel $\dim A = 1$, i.e. de rang réel 1.

Dans cette thèse, on supposera que $\dim A \geq 2$, ce qui est le cas pour $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. On interprète l'espace homogène G/M grâce aux images dans G/K des orbites des images des chambres de Weyl $\{g.(e^{\mathfrak{a}^+}K)\}_{g\in G}$ comme on pourrait le faire sur $\mathbb{H}^2$, en identifiant les éléments du fibré unitaire tangent à des demi-géodésiques. La projection de Jordan $\lambda : G \to \mathfrak{a}^+$ qui encode toutes les informations sur les valeurs propres des éléments de G va jouer un rôle analogue aux longueurs de translations des isométries de $\mathbb{H}^2$. Les éléments loxodromiques, i.e. les éléments de G dont la projection de Jordan sont dans l'intérieur $\mathfrak{a}^{++}$ de la chambre de Weyl, vont jouer le même rôle que les isométries hyperboliques.

Le bord de Furstenberg $\mathcal{F} := G/MAN$ va jouer un rôle similaire au bord géométrique de $\mathbb{H}^2$. Grâce à celui-ci, on va pouvoir définir un sous-ensemble fermé $\Omega \subset \Gamma\backslash G/M$ naturellement $A-$invariant. Pour $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, J-P. Conze et Y. Guivarc'h ont prouvé [CG02, Théorème 6.4] qu'il existait une $A-$orbite dense dans Ω.

1.2 Le cône limite

Le cône limite, défini par Y. Benoist dans [Ben97b] est donné par

$$\mathcal{C}(\Gamma) := \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{R}_+\lambda(\gamma)}.$$

Théorème 3 ([Ben97b])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense, discret de G.*

Alors le cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$ est convexe d'intérieur non vide.

Il se trouve que le cône limite est relié à la question de marche aléatoire suivante.

Question 4. *Tirons au hasard, de manière indépendante et selon la même loi de probabilité, une suite d'éléments $(b_n)_{n\geq 1}$ dans Γ. Quel est le comportement asymptotique en projection de Cartan et Jordan des éléments de la suite $(b_1...b_n)_{n\geq 1}$?*

Notons $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$ l'ensemble des mesures de probabilité μ à *support fini* dans Γ et dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense de G. D'après le Théorème de Furstenberg-Kesten [FK60], pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$, presque sûrement, la suite $\frac{1}{n}\kappa(X_n...X_1)$ converge vers une limite indépendante de l'aléa. Sa limite, notée σ_μ, est appelée le vecteur de Lyapunov de μ. Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR85], Goldsheid et Margulis [GM89], ont démontré que pour toute mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$, alors $\sigma_\mu \in \mathfrak{a}^{++}$. Le résultat suivant, prouvé par Ç. Sert dans sa thèse [Ser16] et dont on trouvera une version dans [BS18] est plus précis. On l'énonce dans le cas des mesures à support fini.

Théorème 5 (Proposition 5.5 [BS18])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors pour tout $\mu \in \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$,*

$$\sigma_\mu \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

On peut se demander, à l'inverse, si tout vecteur dans l'intérieur du cône limite est un vecteur de Lyapunov. Nous donnons une réponse affirmative : énonçons le Théorème 3.5 dans le cas où Γ est un sous-groupe.

Théorème I. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G.*
Alors l'application (continue)

$$\begin{aligned}\sigma : \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) &\longrightarrow \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)\\ \mu &\longmapsto \sigma_\mu\end{aligned}$$

est surjective.

Il se trouve que le cône limite est relié aux problématiques de mélange. Lorsque Γ est un sous-groupe "Ping-Pong" de $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$, X. Thirion [Thi07] a prouvé le mélange en mesure pour une mesure infinie qui charge les ouverts de Ω, pour un sous-groupe à un paramètre particulier de A, celui associé au vecteur de croissance. Lorsque Γ est l'image d'une représentation hyperconvexe Zariski dense, A. Sambarino [Sam15, Théorème B] a prouvé que pour tout $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, l'action du sous-groupe à un paramètre $A_\theta := \exp(\mathbb{R}\theta)$ est mélangeante pour une mesure infinie qui charge les ouverts de Ω. On peut ainsi utiliser ce résultat pour en déduire que pour toute image Γ d'une représentation hyperconvexe Zariski dense, pour tout $\theta \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$, l'action du sous-groupe A_θ sur $\Omega \subset \Gamma\backslash G/M$ est topologiquement mélangeante.

Dans cette thèse, G est un groupe de Lie connexe semisimple réel linéaire de type non-compact et on suppose seulement que Γ est un sous-groupe discret, Zariski dense de G.

Le résultat suivant est tiré de l'article co-écrit avec O. Glorieux. Il généralise un théorème de transitivité de l'action de A par multiplication à droite sur le sous-ensemble naturel $\Omega \subset \Gamma\backslash G/M$ prouvé par J-P. Conze et Y. Guivarc'h dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Théorème II (Théorème 4.1 de [DG18], Théorème 5.8 dans la thèse). *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe discret, Zariski dense de G.*
Alors l'action par multiplication à droite de A sur Ω est topologiquement transitive.

Voici le théorème principal de mélange sur $\Gamma\backslash G/M$.

Théorème III (Théorème 1.1 [DG18], Théorème 6.9 dans la thèse). *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense, discret de G. Soit $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.*
Alors l'action par multiplication à droite de A_θ sur Ω est topologiquement mélangeante si et seulement si θ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Étudions maintenant l'action de sous-groupes à un paramètre de A sur $\Gamma\backslash G$. Notons $\pi_{G/M} : G \to G/M$ la projection naturelle. Celle-ci est équivariante pour l'action par multiplication à gauche de G, ainsi, elle induit la projection $\pi_{\Gamma\backslash G/M} : \Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash G/M$. Notons $\Omega_G := \pi^{-1}_{\Gamma\backslash G/M}(\Omega)$. C'est un sous-ensemble naturellement $A-$invariant de G.

Théorème IV (Théorème 6.16 dans la thèse). *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. On suppose que M est* abélien et connexe*. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense, discret de G. Soit $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.*
Alors l'action par multiplication à droite de A_θ sur Ω_G est topologiquement mélangeante si et seulement si θ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Ce théorème est donc vérifié pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SO}_0(p, p+2)$. Le Théorème 6.16 propose un énoncé plus général, sous l'hypothèse que M est abélien, non nécessairement connexe, ce qui est le cas pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Les méthodes utilisées ne permettent cependant pas encore de prouver le cas général où M est non abélien. Une autre limitation est qu'elles ne permettent pas de traiter le cas des sous-groupes A_θ où $\theta \in \partial\mathfrak{a}^+$.

1.3 Plan de la thèse

Dans le chapitre 2, on trouvera d'abord un rappel de la correspondance entre espaces symétriques et groupes de Lie semisimples. Ensuite, on y énonce les décompositions usuelles de Cartan, Jordan, Iwasawa et Bruhat des groupes de Lie. Puis on définit les sous-semigroupes de Schottky, en se basant sur l'exposition des articles d'Y. Benoist [Ben96], [Ben97b] et [Ben00]. Enfin, on redonne des preuves des estimations des projections de Jordan et de Cartan des éléments des sous-semigroupes de Schottky.

Le chapitre 3 est consacré à la preuve du Théorème I. Donnons les étapes importantes de la preuve. Fixons un point θ de l'intérieur du cône limite.

(1) Un premier lemme, le Lemme 3.23, permet de construire une famille finie $S \subset \Gamma$, de cardinal $\dim \mathfrak{a}$, vérifiant plusieurs conditions techniques, en particulier telle que le cône

$$\mathcal{C}_\theta := \sum_{\gamma \in S} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)$$

soit convexe d'intérieur non vide et contienne θ dans son intérieur et telle que pour tout $n \geq 1$, le sous-semigroupe engendré par $\{\gamma^n \mid \gamma \in S\}$ est Schottky Zariski dense de G.

(2) Un lemme de convexité, le Lemme 3.25, permet de recouvrir un translaté de ce cône par une famille de simplexes à $\dim \mathfrak{a} + 1$ sommets de $\mathfrak{a}$, non inclus dans un hyperplan de $\mathfrak{a}$, dont les sommets sont des projections de Jordan d'éléments du sous-semigroupe engendré par S. L'unicité des coordonnées barycentriques pour ces simplexes de $\mathfrak{a}$ permet d'associer, pour chaque point d'un tel simplexe, une unique mesure de probabilité dans $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$.

(3) On prouve un lemme clé d'estimation du vecteur de Lyapunov lorsque le support de la mesure est dans un sous-semigroupe Schottky, le Lemme 3.21. La preuve de ce lemme utilise la loi des grands nombres sur G et les estimations en projection de Cartan des éléments des sous-semigroupes Schottky.

(4) On utilise ensuite la continuité de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) &\longrightarrow \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \sigma_\mu \end{aligned}$$

dûe à Furstenberg et Kifer [FK83] pour définir, pour chaque simplexe de la famille construite à l'étape (2), une application continue à valeurs dans $\mathfrak{a}$, déplaçant de manière contrôlée les points, le terme d'erreur étant donné par l'étape (3).

(5) On applique le Lemme 3.26, avatar du théorème de point fixe de Brouwer, sur ces applications, ce qui permet de prouver qu'excepté les points qui sont trop près du bord des simplexes de l'étape (2), tous les autres points de leur intérieur sont des vecteurs de Lyapunov. On remplit ainsi un translaté du cône $\mathcal{C}_\theta$ de vecteurs de Lyapunov.

(6) Enfin, on utilise que Γ est un sous-groupe pour contracter de manière uniforme vers 0 et continuement ces vecteurs de Lyapunov. On réalise ainsi l'intérieur du cône convexe $\mathcal{C}_\theta$ par des vecteurs de Lyapunov. En particulier, θ est un vecteur de Lyapunov pour une mesure à support fini dans Γ, dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense de G.

Dans le chapitre 4, on met en place les outils pour prouver les théorèmes de mélange (III et IV) : les coordonnées de Hopf de G/M ainsi que deux systèmes de coordonnées naturelles de G, une basée sur la décomposition d'Iwasawa, l'autre basée sur la décomposition de Bruhat. Les coordonnées de Hopf de G/M, dont on pourra aussi trouver une construction dans la thèse de X. Thirion [Thi07] ou encore dans l'article [DG18], généralisent les coordonnées de Hopf pour $T^1\mathbb{H}^2$, où le bord de Furstenberg $\mathcal{F} = G/MAN$ va jouer le même rôle que le bord géométrique $\partial\mathbb{H}^2$ et la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$ va jouer le même rôle que la coordonnée réelle. On obtient ainsi un plongement

$$G/M \hookrightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathfrak{a},$$

où l'action par multiplication à gauche de G se lit de manière $G-$équivariante dans les deux premières coordonnées et dans la dernière coordonnée par un cocycle. L'action par multiplication à droite par A sur G/M se lit par une translation dans la dernière coordonnée, tout en fixant les deux premières. Les coordonnées d'Iwasawa-Hopf de G sont modelées sur les coordonnées de Hopf de G/M en relevant la première coordonnée dans $\mathcal{F}$ d'un élément $g \in G$ par sa coordonnée dans K de la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$

$$G \hookrightarrow K \times \mathcal{F} \times \mathfrak{a}.$$

Enfin, pour pouvoir mieux lire l'action à gauche de G, on scinde grâce à la décomposition de Bruhat, la coordonnée dans K en cartes locales à valeurs dans $\mathcal{F} \times M$ pour obtenir les coordonnées locales de Bruhat-Hopf de G, à valeurs dans $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathfrak{a} \times M$.
La dernière partie de ce chapitre est modelée sur la dernière partie du chapitre 2, dans le sens où on généralise la projection de Jordan dans $\mathfrak{a} \times M$ et on prouve des estimations sur la projection généralisée des éléments de sous-semigroupes de Schottky. L'article d'Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR07] a été source d'inspiration pour cette dernière partie.

Le chapitre 5 est un intermède au chapitre 6. On y définit les ensembles $\Gamma-$invariants et $A-$invariants naturels de G/M et G grâce aux coordonnées définies au chapitre 4. Grâce au théorème principal de ce chapitre, le Théorème 5.2, on prouve des conditions nécessaires de transitivité topologique de l'action des sous-groupes A_θ avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ sur $\Gamma\backslash G/M$ et $\Gamma\backslash G$ (Corollaire 5.4 et Proposition 5.17).

Dans le chapitre 6, on prouve les théorèmes de mélange dans G/M et dans G, Théorèmes III et IV, dans le cas où M est un sous-groupe abélien. Fixons une direction θ de l'intérieur $\mathfrak{a}^{++}$ de la chambre de Weyl. Supposons d'abord que l'action de A_θ sur Ω est topologiquement mélangeante. On utilise alors les conditions nécessaires de transitivité topologique du chapitre 5 pour en déduire que θ est dans l'intérieur du cône limite.

Donnons les étapes principales de la preuve du sens inverse : si θ est un point de l'intérieur du cône limite, alors l'action de A_θ sur Ω_G est topologiquement mélangeante.

On utilise d'abord le théorème de non-arithméticité d'Y. Benoist [Ben00, Proposition 1] et les lemmes de densité (Lemmes 6.5, 6.6) pour prouver la Proposition 6.7, donnant la densité dans un translaté d'un cône convexe d'intérieur non vide dont l'intérieur contient θ, des projections de Jordan d'éléments loxodromiques dont les points fixes attractifs et répulsifs sont dans des petits ouverts de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Ensuite, grâce au théorème de non-arithméticité d'Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR07, Théorème 1.1] et au dernier lemme de densité, le Lemme 6.12, on prouve une proposition de décorrélation du cocycle donné par les coordonnées de Bruhat-Hopf d'élément loxodromiques dans $\mathfrak{a} \times M$, la Proposition 6.13.

Enfin, on conclut la preuve du Théorème IV de mélange dans $\Gamma\backslash G/M$ grâce au théorème transitivité topologique de l'action de A sur Ω, Théorème II, et aux coordonnées de Bruhat-Hopf.

L'hypothèse M abélien est cruciale pour prouver les Lemmes 6.6, 6.12 et donc la proposition de décorrélation mais ne sert pas ailleurs, dans les chapitres 4 et 5 en particuliers.

Chapitre 2

Groupes de Lie, exemples et éléments loxodromiques

Dans ce chapitre, on rappelle le lien entre les variétés Riemanniennes globalement symétriques et les groupes de Lie. En particulier, la première partie du chapitre permet de définir ce qu'est un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact (Définitions 2.5, 2.8).

Dans la seconde partie du chapitre, on donne quelques rappels sur la structure des groupes de Lie semisimples réels linéaires, de type non-compact. En particulier, on rappelle les décompositions classiques de Cartan (Théorème 2.13), Jordan (Théorème 2.27), Iwasawa (Théorème 2.15). On définit les projections de Cartan, Jordan, ainsi que le cocycle d'Iwasawa (resp. Définitions 2.14, 2.28, 2.25). Enfin on récapitule ces décompositions dans un tableau pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^k$.

Dans la troisième partie du chapitre, on présente les outils principaux de cette thèse, les éléments loxodromiques (Définition 2.30). On étudie leurs propriétés dynamiques de contraction (Lemme 2.55) sur le bord de Furstenberg (Définition 2.18). On construit des sous-semigroupes Schottky (Définition 2.56): un exemple de sous-semigroupe ne contenant que des éléments loxodromiques. Enfin, on estime les projections de Jordan et les cocycles d'Iwasawa de produits d'éléments loxodromiques suffisamment contractants (Lemme 2.64, 2.65 et Proposition 2.66).

Ce chapitre est basé sur le livre d'Helgason [Hel01] pour les rappels sur les variétés Riemanniennes globalement symétriques (partie 1), ainsi que les généralités sur les algèbres de Lie (partie 2). On se base sur le livre de Y. Benoist et J-F. Quint [BQ16b] pour les notions de représentations des groupes de Lie semisimples réels linéaires. Enfin, pour les propriétés dynamiques des éléments loxodromiques et la définition des sous-semigroupes Schottky, on se base sur les articles d'Y. Benoist [Ben96], [Ben97b], [Ben00].

2.1 Groupes de Lie et espaces symétriques

Cette partie est basée sur les chapitres IV, V du livre d'Helgason [Hel01]. J'y rappelle comment les groupes de Lie et les algèbres de Lie apparaissent lorsqu'on étudie des variétés Riemanniennes globalement symétriques. Ensuite, grâce à la structure des algèbres de Lie, toute variété Riemannienne globalement symétrique se décompose en un produit de trois types d'espaces symétriques : les espaces euclidiens, les espaces de type compact et les espaces de type non-compact. La courbure sectionnelle de ces trois types d'espaces symétriques est respectivement partout nulle, positive et négative. Enfin, cela me permettra de définir ce qu'est un groupe de Lie de type non-compact.

2.1.1 Espaces symétriques

Commençons par définir les espaces globalement symétriques. Soit $\mathcal{M}$ une variété Riemannienne et p un point de cette variété. La symétrie géodésique en p, notée s_p, est définie localement sur un petit voisinage de p par $s_p(x) = y$, où y est le symétrique de x sur la géodésique joignant x à p.

Définition 2.1 (Chapitre IV, 3 [Hel01]). *Soit $\mathcal{M}$ une variété Riemannienne. On dit que $\mathcal{M}$ est* un espace globalement symétrique Riemannien *si pour tout $p \in \mathcal{M}$,*

(1) la symétrie géodésique s_p est une isométrie involutive locale de $\mathcal{M}$,

(2) s_p se prolonge en une isométrie involutive globale de $\mathcal{M}$.

Soit $\mathcal{M}$ un espace globalement symétrique Riemanien. Fixons un point $p_0 \in \mathcal{M}$ et notons

(1) $G := I_0(\mathcal{M})$ la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de $\mathcal{M}$,

(2) $K := \mathrm{Stab}_G(p_0)$ le sous-groupe de G qui fixe p_0,

Nous verrons, grâce au Théorème suivant, que les espaces globalement symétriques sont de la forme G/K, où G est un groupe de Lie connexe et K un sous-groupe compact de G.

Théorème 2.2 (Chapitre IV, Théorème 3.3 [Hel01]). *Soit $\mathcal{M}$ un espace globalement symétrique Riemannien et $p_0 \in \mathcal{M}$. Alors*

(i) G est un groupe de Lie connexe,

(ii) K est un sous-groupe compact de G et l'application

$$\begin{aligned} G/K &\longrightarrow \mathcal{M} \\ gK &\longmapsto gp_0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme analytique.

(ii) L'application $\iota : g \mapsto s_{p_0} g s_{p_0}$ est un automorphisme involutif de G vérifiant

$$(K_\iota)_0 \subset K \subset K_\iota$$

où K_ι est l'ensemble des points fixes de ι et $(K_\iota)_0$ est sa composante connexe de l'identité.

(iii) Tout sous-groupe distingué de G contenu dans K est trivial.

2.1.2 Algèbres de Lie réelles

Pour $p_0 \in \mathcal{M}$, fixé, notons maintenant

(3) $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G,

(4) $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K,

(5) $\vartheta := \mathrm{d}_e\iota$ la différentielle en l'identité de l'automorphisme involutif ι,

(5) $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \vartheta X = -X\}$, le sous-espace propre pour la valeur propre -1 de ϑ,

(6) $\pi : g \mapsto gp_0$ une application de G dans $\mathcal{M}$.

Remarquons que $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une involution. Ainsi, on dispose de la décomposition en sous-espaces propres de ϑ
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Encore d'après le Théorème [Hel01, Chap IV, Thm 3.3], on décrit, dans le point (iv), comment l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se projette dans l'espace tangent en p_0. Dans le point (v) on construit les géodésiques partant de p_0 grâce à $\mathfrak{p}$. Dans le dernier point, on explicite le transport parallèle des vecteurs tangents de $T_{p_0}\mathcal{M}$ selon ces géodésiques.

Théorème 2.3 (Chapitre IV, Théorème 3.3 [Hel01]). *Soit $\mathcal{M}$ un espace globalement symétrique Riemannien et $p_0 \in \mathcal{M}$.*

Alors

(iv) L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_e\pi : \mathfrak{g} &\longrightarrow T_{p_0}\mathcal{M} \\ X &\longmapsto \mathrm{d}_e\pi X \end{aligned}$$

a pour noyau $\ker(\mathrm{d}_e\pi) = \mathfrak{k}$ et sa restriction à $\mathfrak{p}$ est un isomorphisme.

(v) Pour tout $X \in \mathfrak{p}$, l'application $t \mapsto \exp(tX).p_0$ est la géodésique partant de p_0 et de direction $\mathrm{d}_e\pi X$.

(vi) Pour tout $Y \in T_{p_0}\mathcal{M}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, alors $d_{p_0}(s_{e^{\frac{tX}{2}}.p_0} s_{p_0})(Y)$ est le transport parallèle[1] de Y selon la géodésique $t \mapsto e^{tX}.p_0$.

Remarquons que la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Son algèbre de Lie se décompose en $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{R}^n$ est un idéal abélien.

Définition 2.4. *Soit $\mathcal{M}$ un espace globalement symétrique Riemannien et $p_0 \in \mathcal{M}$. On dit que $\mathcal{M}$ est un espace symétrique de* type euclidien *si $\mathfrak{p}$ est un idéal abélien de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Récapitulons, on se donne un espace globalement symétrique $\mathcal{M}$. La composante connexe du groupe des isométries de $\mathcal{M}$ est alors un groupe de Lie. Grâce au choix d'un point base p_0, on en déduit que l'espace symétrique est homogène, de la forme G/K, où K est un sous-groupe compact de G. On construit, grâce à la symétrie géodésique de point base p_0, une involution du groupe des isométries $\iota : G \to G$. Sa différentielle en l'identité $\vartheta := \mathrm{d}_e\iota$ est une involution de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, du groupe de Lie G.

Donnons maintenant quelques notions classiques sur la structure des algèbres de Lie réelles.

Notons $Ad : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ l'application adjointe. On rappelle que pour tout $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$, celle-ci est définie par $Ad(g)X = gXg^{-1}$. On note $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ sa différentielle en l'identité $ad_X(Y) = [X, Y] = XY - YX$. La forme de Killing est la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$ définie par
$$B(X, Y) = \frac{1}{2} Tr(ad_X \circ ad_Y).$$

Définition 2.5. *On dit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est* semisimple *si la forme de Killing est non dégénérée. Elle est* simple*, si elle est semisimple et qu'elle n'admet pas d'idéal non trivial. Elle est* réductive*, si sa représentation adjointe est semisimple.*

[1] c'est bien ce qu'on obtient si on lit la preuve d'Helgason,

De manière équivalente, $\mathfrak{g}$ est semisimple si elle n'admet pas d'idéal résoluble non trivial. Définissons une décomposition classique des algèbres de Lie semisimples réelles.

Définition 2.6. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple réelle. Soit $\vartheta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{k} := \ker(\vartheta - id_{\mathfrak{g}})$ et $\mathfrak{p} := \ker(\vartheta + id_{\mathfrak{g}})$ les espaces propres pour les valeurs propres 1 et -1.*

On dit que ϑ est une involution de Cartan *si la forme bilinéaire symétrique*

$$B_\vartheta(X, Y) = -B(X, \vartheta Y)$$

est définie négative sur $\mathfrak{k}$ et définie positive sur $\mathfrak{p}$.

La décomposition en espaces vectoriels $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est alors une décomposition de Cartan*. De plus, $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{g}$.*

Théorème 2.7 (Chapitre III, Théorèmes 6.3 et 7.1 [Hel01])**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple réelle. Alors il existe une involution de Cartan sur $\mathfrak{g}$.*

Définition 2.8. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple réelle et soit ϑ une involution de Cartan.*

(a) Si la forme de Killing est définie négative, on dit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de type compact*.*

(b) Sinon on dit qu'elle est de type non-compact*.*

Un groupe de Lie semisimple réel est du même type que son algèbre de Lie.

2.1.3 Théorèmes de structure

On se donne un espace globalement symétrique $\mathcal{M}$. La composante connexe du groupe des isométries de $\mathcal{M}$ est alors un groupe de Lie connexe G. Grâce au choix d'un point base p_0, on en déduit que l'espace symétrique est homogène, de la forme G/K, où K est un sous-groupe compact de G. On construit, grâce à la symétrie géodésique de point base p_0, une involution du groupe des isométries $\iota : G \to G$. Sa différentielle en l'identité $\vartheta := \mathrm{d}_e\iota$ est une involution de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, du groupe de Lie G et on dispose de la décomposition en sous-espaces propres de ϑ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

On rappelle (cf Définition 2.4) que $\mathcal{M}$ est de type euclidien lorsque $\mathfrak{p}$ est un idéal abélien de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition 2.9. *Soit $\mathcal{M}$ un espace globalement symétrique Riemannien et $p_0 \in \mathcal{M}$. On suppose que $\mathfrak{g}$ est semisimple.*

(a) Si la forme de Killing est définie négative sur $\mathfrak{g}$, alors on dit que l'espace symétrique $\mathcal{M}$ est de type compact*.*

(b) Sinon, si ϑ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$, alors on dit que l'espace symétrique $\mathcal{M}$ est de type non-compact*.*

Le Théorème suivant porte sur les courbures sectionnelles des espaces globalement symétriques de types différents.

Théorème 2.10 (Chapitre V, Théorème 3.1 [Hel01])**.** *Soit $\mathcal{M}$ un espace simplement connexe, globalement symétrique Riemannien.*

Alors si $\mathcal{M}$ est de type compact (resp. euclidien, non-compact), sa courbure sectionnelle est positive (resp. partout nulle, négative).

Voici maintenant le Théorème de structure des espaces globalement symétriques.

Théorème 2.11 (Chapitre V, Proposition 4.2 [Hel01]). *Soit $\mathcal{M}$ un espace simplement connexe, globalement symétrique Riemannien. Alors il existe un espace euclidien $\mathcal{M}_0$ et des espaces globalement symétriques $\mathcal{M}_-$ et $\mathcal{M}_+$, respectivement de types compact et non-compact tels que*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_- \times \mathcal{M}_+.$$

Dans le reste de ce manuscript, on s'intéressera aux groupes de Lie semisimples réels linéaires de types non-compact.

2.2 Théorèmes de décomposition

Cette partie est basée sur les chapitre VI et IX du livre [Hel01]. On y rappelle les théorèmes de décomposition classiques des groupes de Lie semisimples, réels linéaires, de types non-compact.

2.2.1 Décomposition de Cartan

Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact. Notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et considérons une involution de Cartan ϑ de $\mathfrak{g}$, ainsi que la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ correspondante. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un sous-espace abélien maximal tel que l'endomorphisme adjoint de chaque élément est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, i.e. une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}$, notons $\mathfrak{m}$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{k}$.

Définition 2.12. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact, notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Le* rang réel *du groupe de Lie G est la dimension réelle d'une sous-algèbre de Cartan* $\dim \mathfrak{a}$.

Soit $K \subset G$ un sous-groupe de Lie de G tel que son algèbre de Lie soit $\mathfrak{k}$. Alors d'après [Hel01, Chapitre VI, Théorème 1.1], K est connexe, fermé et $Ad_G(K)$ est compact. De plus, lorsque G est de centre fini, K est compact et c'est un *sous-groupe compact maximal.* Notons $M := Z_K(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K et $A := \exp(\mathfrak{a})$ un *tore déployé maximal* de G.

Pour toute forme linéaire $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, on définit

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid ad_H(X) = \alpha(H)X,\ \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Remarquons [2] que pour tout $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*$

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

On dit alors que α est une *racine restreinte* si $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Notons $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{g}$. Comme $(ad_H)_{H\in\mathfrak{a}}$ est une famille d'endomorphismes de $\mathfrak{g}$ qui commutent deux à deux, on diagonalise $\mathfrak{g}$ pour cette famille

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha.$$

De plus, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, et pour tout $\alpha \in \Sigma$,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha.$$

[2]en utilisant l'identité de Jacobi $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$

Remarquons d'ailleurs que puisque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, l'ensemble des racines restreintes Σ est a fortiori fini. L'ensemble des points *singuliers* de $\mathfrak{a}$ est la réunion finie d'hyperplans $\underset{\alpha\in\Sigma}{\cup}\ker(\alpha)$ de $\mathfrak{a}$. Son complémentaire est l'ensemble des points *réguliers* de $\mathfrak{a}$, les composantes connexes de l'ensemble des points réguliers sont les *chambres de Weyl*. Choisissons une telle composante connexe, $\mathfrak{a}^{++}$, appelée *chambre de Weyl positive*, et notons $\mathfrak{a}^+$ son adhérence dans $\mathfrak{a}$. On dit qu'une racine $\alpha \in \Sigma$ est *positive* si elle est à valeurs positive dans $\mathfrak{a}^+$. Une racine positive est dite *simple* si elle n'est pas somme de deux racines positives. Notons $\Pi := \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples et Σ_+ l'ensemble des racines positives. Alors, il découle des définitions que

$$\mathfrak{a}^+ = \underset{1\leq i\leq r}{\cap} \alpha_i^{-1}(\mathbb{R}_+).$$

L'image par l'exponentielle de la chambre de Weyl fermée $\mathfrak{a}^+$ est notée $A^+ := \exp(\mathfrak{a}^+)$, son intérieur A^{++}.

Théorème 2.13 (Chapitre IX, Théorème 1.1 [Hel01])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact. Alors*

$$G = KA^+K,$$

c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, il existe $k, l \in K$ (non-uniques) et un unique élément $\kappa(g) \in A^+$ tels que $g = k\exp(\kappa(g))l$.

Définition 2.14. *L'application*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathfrak{a}^+ \\ g &\longmapsto \kappa(g) \end{aligned}$$

définie pour tout élément $g \in G$ telle que

$$g \in K\exp(\kappa(g))K$$

est la projection de Cartan.

2.2.2 Décompositions d'Iwasawa et de Bruhat

Considérons les sous-algèbres nilpotentes

$$\mathfrak{n} := \underset{\alpha\in\Sigma_+}{\oplus} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathfrak{n}_- := \underset{\alpha\in\Sigma_+}{\oplus} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Les sous-groupes $N := \exp(\mathfrak{n})$ et $N^- := \exp(\mathfrak{n}_-)$ sont les sous-groupes unipotents associés. Par définition, A normalise N et N^-.

Théorème 2.15 (Chapitre IX, Théorème 1.3 [Hel01])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact. Alors $G = KAN$ et $G = KAN^-$ et les applications (où $N^+ = N$)*

$$\begin{aligned} K \times A \times N^{\pm} &\longrightarrow G \\ (k, a, n) &\longmapsto kan \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes.

Rappelons que pour tout $\alpha \in \Sigma_+$,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha,$$

où $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_-$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ et MAN et MAN^- sont des sous-groupes de G.

Décomposition de Bruhat : Notons $W := N_K(A)/Z_K(A)$ le groupe de Weyl de G. On choisit pour tout élément $w \in W$ un représentant $k_w \in N_K(A)$.

Théorème 2.16 (Chapitre IX, Théorème 1.4 [Hel01]). *Soit G un groupe de Lie semisimple de type non-compact. Alors*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B k_w B$$

où $B = MAN$.

On note k_ι un représentant dans K de l'involution telle que

$$Ad(k_\iota)(\mathfrak{a}^+) = -\mathfrak{a}^+.$$

Rappelons alors que $N^- = k_\iota N k_\iota^{-1}$.

Proposition 2.17. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact. Alors*

(i) pour tout $a \in A^{++}$, $u_+ \in N$ et $u_- \in N^-$,

$$\lim_{n+\infty} a^{-n} u_+ a^n = e_G \text{ et } \lim_{n+\infty} a^n u_- a^{-n} = e_G.$$

(ii) MA normalise les sous-groupes N et N^-,

(iii) la suite $(a^{-n} g a^n)_{n\geq 1}$ (resp. $(a^n g a^{-n})_{n\geq 1}$) converge vers e_G pour tout $a \in A^{++}$ si et seulement si $g \in N$ (resp. $g \in N^-$),

(iv) la suite $(a^{-n} g a^n)_{n\geq 1}$ (resp. $(a^n g a^{-n})_{n\geq 1}$) est bornée pour tout $a \in A^{++}$ si et seulement si $g \in MAN$ (resp. $g \in MAN^-$).

Prouvons cette Proposition, puisqu'elle est fondamentale pour les constructions du Chapitre 4 et les preuves sont élémentaires.

Preuve. Prouvons d'abord le premier point. Pour tout $u_+ \in N$, il existe $x_+ \in \mathfrak{n}_+$ tel que $u_+ = \exp(x_+)$. Ainsi, pour tout $a = e^\theta \in A^{++}$, avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, et $n \geq 1$

$$a^{-n} u_+ a^n = \exp(Ad(a^{-n}) x_+).$$

Prouvons que $Ad(a^{-n}) x_+ \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Par définition de l'algèbre nilpotente $\mathfrak{n}_+$, il existe une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in \Sigma_+} \subset (\mathfrak{g}_\alpha)_{\alpha \in \Sigma_+}$ tel que $x_+ = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} x_\alpha$. De plus, pour tout $n \geq 1$

$$Ad(a^{-n}) x_+ = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} e^{-n\alpha(\theta)} x_\alpha.$$

Or $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, d'où pour tout $\alpha \in \Sigma_+$ et $n \geq 1$,

$$-n\alpha(\theta) \underset{n+\to}{\longrightarrow} -\infty.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} Ad(a^{-n}) x_+ = 0$. En passant à l'exponentielle, on en déduit que pour tout $a \in A^{++}$ et $u_+ \in N$,

$$a^{-n} u_+ a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e_G.$$

De même, on prouve que pour tout $a \in A^{++}$ et $u_- \in N^-$,

$$a^{-n}u_-a^n \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} e_G.$$

Pour le second point, prouvons que pour tout $m \in M$ et $x \in A$ et $u_+ \in N$, l'élément mu_+m^{-1} est dans N. Considérons le sous-groupe parabolique minimal MAN. Comme MA est un sous-groupe de MAN, si $u_+ \in N$ et $(m,x) \in M \times A$, alors $mxu_+x^{-1}m^{-1}$ est dans MAN et s'écrit

$$mxu_+x^{-1}m^{-1} = m'a'u'$$

où $(m',a',u') \in M \times A \times N$. D'après le premier point, $\lim_{n\to+\infty} a^{-n}u'a^n = e_G$. Comme M et A commutent, on en déduit

$$a^{-n}mxu_+x^{-1}m^{-1}a^n = a^{-n}m'a'u'a^n = m'a'(a^{-n}u'a^n) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} m'a'.$$

D'autre part

$$a^{-n}mxu_+x^{-1}m^{-1}a^n = mx(a^{-n}u_+a^n)x^{-1}m^{-1} \underset{n+\infty}{\longrightarrow} mxe_Gx^{-1}m^{-1} = e_G.$$

On en déduit $m'a' = e_G$, d'où $mxu_+x^{-1}m^{-1} \in N$. C'est le résultat voulu pour le second point.

De même, on vérifie que MA normalise N^-.

Avant de prouver la réciproque du premier point, le point (iii), prouvons le point (iv). Remarquons que pour tout $(m',a',u') \in M \times A \times N$ et $a \in A^{++}$, la suite $(a^{-n}m'a'u'a^n)_{n\geq 1}$ est bornée puisqu'elle converge vers $m'a'$. En particulier, pour tout $p \in MAN$ et pour tout $a \in A^{++}$, la suite $(a^{-n}pa^n)_{n\geq 1}$ est bornée. Réciproquement, soit $g \in G$ tel que pour tout $a \in A^{++}$, la suite $(a^{-n}ga^n)_{n\geq 1}$ est bornée. Écrivons la décomposition de Bruhat de g, il existe $p_1, p_2 \in MAN$ et $k_w \in N_K(A)$ tel que

$$g = p_1k_wp_2.$$

Alors pour tout $a \in A^{++}$,

$$a^{-n}ga^n = a^{-n}p_1k_wp_2a^n = (a^{-n}p_1a^n)(a^{-n}k_wa^n)(a^{-n}p_2a^n).$$

Puisque les suites $(a^{-n}p_ia^n)_{n\geq 1}$ convergent pour tout $i = 1,2$, on en déduit que la suite $(a^{-n}ga^n)_{n\geq 1}$ est bornée si et seulement si la suite $(a^{-n}k_wa^n)_{n\geq 1}$ est bornée. Or pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ tel que $a = e^\theta$ et $k_w \in N_K(A)$,

$$a^{-n}k_wa^n = e^{-n\theta}k_we^{n\theta} = e^{-n\theta}(k_we^{n\theta}k_w^{-1})k_w = e^{-n\theta}e^{Ad(k_w)(n\theta)}k_w.$$

Or k_w est dans le normalisateur de A, donc $Ad(k_w)(n\theta) \in \mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a}$ est commutative, on en déduit que

$$e^{-n\theta}e^{Ad(k_w)(n\theta)} = e^{-n\theta+Ad(k_w)(n\theta)} = e^{-n(\theta-Ad(k_w)(\theta))}.$$

La suite $(e^{-n\theta}k_we^{n\theta})_{n\geq 1}$ est donc bornée que si et seulement si $\theta - Ad(k_w)(\theta) = 0$. Comme $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ est un point régulier, le point $-Ad(k_w)(\theta)$ est aussi un point régulier de $\mathfrak{a}$, dans l'intérieur de la chambre de Weyl $-Ad(k_w)\mathfrak{a}^{++}$. Donc $\theta - Ad(k_w)(\theta) = 0$ ne se produit que lorsque l'intérieur des chambres $Ak(k_w)\mathfrak{a}^{++}$ et $\mathfrak{a}^{++}$ coïncident. Or, les chambres de Weyl $\mathfrak{a}^{++}$ et $Ad(k_w)\mathfrak{a}^{++}$ ne coïncident que si et seulement si $k_w \in M$.

Récapitulons, pour tout $k_w \in N_K(A)$ et pour tout $a \in A^{++}$, la suite $(a^{-n}k_wa^n)_{n\geq 1}$ est bornée si et seulement si $k_w \in M$. Donc la suite $(a^{-n}ga^n)_{n\geq 1}$ est bornée si et seulement si $g = p_1 k_w p_2 \in (MAN)M(MAN) = MAN$. De même, $(a^n g a^{-n})_{n\geq 1}$ est bornée ssi $g \in MAN^-$, d'où le point (iv).

Prouvons maintenant le point (iii), supposons que la suite $(a^{-n} g a^n)_{n\geq 1}$ converge vers e_G. En particulier, cette suite est bornée et on en déduit, par le point (iv) que $g \in MAN$. On écrit $g = m'a'u'$ avec $(m', a', u') \in M \times A \times N$. La suite $(a^{-n} m'a'u'a^n)_{n\geq 1}$ converge vers $m'a'$, d'où $m'a' = e_G$ et $g \in N$. De même, on prouve l'équivalence pour N^-. □

Bord de Furstenberg

Définition 2.18. *L'espace homogène $\mathcal{F} := G/MAN$ est le* bord de Furstenberg *de l'espace symétrique de type non-compact G/K. Posons $\eta_0 := MAN$ et $\check{\eta}_0 := k_\iota \eta_0$, où $k_\iota \in K$ est un représentant de l'involution d'opposition.*

Le fait suivant découle de la décomposition d'Iwasawa.

Fait 2.19. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact. Alors $\mathcal{F} \simeq K/M$, i.e. l'application $K-$équivariante*

$$\begin{aligned} K/M &\longrightarrow \mathcal{F} \\ kM &\longmapsto k\eta_0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Preuve. Il découle du Théorème 2.15 de décomposition d'Iwasawa que K agit transitivement sur G/P. Or $\mathrm{Stab}_K(\eta_0) = M$ d'où le fait. □

Voici une propriété qui découle du Théorème 2.16 de décomposition de Bruhat.

Corollaire 2.20 (Chapitre IX, Corollaire 1.9 [Hel01])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Alors l'application*

$$\begin{aligned} N^- &\longrightarrow N^-\eta_0 \\ n_- &\longmapsto n_-\eta_0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme, son image est une sous-variété ouverte de $\mathcal{F}$ dont le complémentaire est une union finie de sous-variétés disjointes de dimensions inférieures.

Définition 2.21. *Le sous-ensemble $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ défini par*

$$\mathcal{F}^{(2)} := \{(g\eta_0, g\check{\eta}_0) \mid g \in G\}$$

est l'ensemble des paires ordonnées transverses. *Comme k_ι est involutive, $(\check{\eta}_0, \eta_0) = (k_\iota \eta_0, k_\iota \check{\eta}_0) \in \mathcal{F}^{(2)}$. On dira que $\xi, \eta \in \mathcal{F}$ sont* position générale *ou* transverses *lorsque les paires ordonnées (ξ, η) ou (η, ξ) sont transverses.*

Voici un critère.

Proposition 2.22. *Soit G un groupe de Lie connexe, algébrique, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Alors*

(i) l'ensemble des points transverses à $\check{\eta}_0$ est $N^-\eta_0$,

(ii) pour tout $\eta, \xi \in \mathcal{F}$ et $k_\eta, \check{k}_\xi \in K$ tels que $k_\eta \eta_0 = \eta$ et $\check{k}_\xi \check{\eta}_0 = \xi$,

$$(\eta, \xi) \in \mathcal{F}^{(2)} \Longleftrightarrow \check{k}_\xi^{-1} k_\eta \in N^- MAN,$$

(iii) pour tout $\eta \in \mathcal{F}$ *et tout* $\check{k}_\eta \in K$ *tel que* $\check{k}_\eta \check{\eta}_0 = \eta$*, l'ensemble des points transverses à* η *est* $\check{k}_\eta N^- \eta_0$*.*

De plus, l'application $G-$*équivariante*

$$\begin{aligned} G/AM &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)} \\ gAM &\longmapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Preuve : Soit $g \in G$ tel que $(g\eta_0, \check{\eta}_0) \in \mathcal{F}^{(2)}$. Il existe donc $h \in G$ tel que

$$(g\eta_0, \check{\eta}_0) = h(\eta_0, \check{\eta}_0).$$

D'une part $h\check{\eta}_0 = \check{\eta}_0$. On en déduit $h \in \mathrm{Stab}(\check{\eta}_0) = k_\iota MANk_\iota^{-1}$. Or $N^- = k_\iota N k_\iota^{-1}$ et $k_\iota MAk_\iota^{-1} = MA$, d'où

$$h \in MAN^-.$$

D'autre part $g\eta_0 = h\eta_0$, donc $h^{-1}g \in \mathrm{Stab}(\eta_0) = MAN$. Donc

$$g \in hMAN \subset MAN^- MAN.$$

Or MA normalise N^-, donc $g \in N^- MAN$. D'où $g\eta_0 \in N^-\eta_0$.

Pour le point (ii), on remarque que $(k_\eta \eta_0, \check{k}_\xi \check{\eta}_0) \in \mathcal{F}^{(2)}$ ssi $(\check{k}_\xi^{-1} k_\eta \eta_0, \check{\eta}_0) \in \mathcal{F}^{(2)}$. Le point (iii) découle du point (ii) puisque $\check{k}_\eta(N^-\eta_0, \check{\eta}_0) \in \mathcal{F}^{(2)}$.

Enfin, remarquons que G agit transitivement sur $\mathcal{F}^{(2)}$. De plus,

$$\mathrm{Stab}_G(\eta_0, \check{\eta}_0) = MAN \cap MAN^- = AM.$$

D'où la $G-$équivariance et la bijectivité de l'application

$$\begin{aligned} G/AM &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)} \\ gAM &\longmapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0). \end{aligned}$$

L'action de G sur $\mathcal{F} = G/MAN$ est différentiable et l'action de G sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ aussi, donc l'application $g \mapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0)$ est différentiable. Le noyau de la différentielle en l'identité de $g \mapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0)$ contient $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. Comme les applications $N^- \to N^-\eta_0$ et $N \to N\check{\eta}_0$ sont des difféomorphismes, la différentielle en l'identité de $g \mapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0)$ est surjective de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$. Par décomposition de Bruhat

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Donc le noyau de la différentielle en l'identité de $g \mapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0)$ est égal à $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$. On en déduit que l'application $G/AM \to \mathcal{F}^{(2)}$ est un difféomorphisme local en AM et par transitivité de l'action de G sur G/AM, c'est un difféomorphisme. $\square$

Définition 2.23. *Pour tout* $\eta \in \mathcal{F}$*, notons* $\mathcal{X}(\eta) \subset \mathcal{F}$ *l'ensemble des points non transverses à* η*, i.e.*

$$\mathcal{X}(\eta) := \left(\check{k}_\eta N^- \eta_0\right)^{\complement}$$

où $\check{k}_\eta \in K$ *est tel que* $\check{k}_\eta \check{\eta}_0 = \eta$*.*

Cocycle d'Iwasawa Le corollaire suivant va permettre de définir le cocycle d'Iwasawa $\sigma : G \times \mathcal{F} \to \mathfrak{a}$.

Corollaire 2.24. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact. Soient $\eta \in \mathcal{F}$ et $g \in G$. Alors, il existe un unique élément $\sigma(g, \eta) \in \mathfrak{a}$ tel que pour tout $k_\eta \in K$ avec $k_\eta \eta_0 = \eta$,*

$$gk_\eta \in K \exp(\sigma(g, \eta))N.$$

Preuve : Notons a le terme dans A de la décomposition d'Iwasawa de gk_η, i.e.

$$gk_\eta \in KaN.$$

Il suffit de vérifier que a ne dépend pas du choix du réprésentant $k_\eta \in K$ tel que $k_\eta \eta_0 = \eta$.

Soit $k'_\eta \in K$ tel que $k'_\eta \eta_0 = \eta$. Il existe donc $m \in M$ tel que $k'_\eta = k_\eta m$. Or d'une part, par décomposition d'Iwasawa de gk'_η, il existe un unique $a' \in A$ tel que

$$gk'_\eta \in Ka'N.$$

D'autre part,

$$gk'_\eta = gk_\eta m \in KaNm.$$

Rappelons que $am = ma$ puisque M commute avec A. D'après la Proposition 2.17, $m^{-1}Nm = N$. Ainsi, $Ka'N = KaNm = (Km)a(m^{-1}Nm)$ et par unicité de la décomposition d'Iwasawa, on en déduit $a = a'$. □

Définition 2.25. *L'application*

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{F} &\longrightarrow \mathfrak{a} \\ (g, \eta) &\longmapsto \sigma(g, \eta) \end{aligned}$$

définie pour tout $g \in G$ et $\eta := k_\eta \eta_0 \in \mathcal{F}$, avec $k_\eta \in K$, telle que

$$gk_\eta \in K \exp(\sigma(g, \eta))N$$

est appelée le cocycle d'Iwasawa-Busemann.

On a la relation de cocycle.

Proposition 2.26. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact.*

Alors l'application $\sigma : G \times \mathcal{F}$ vérifie la relation de cocycle, i.e. pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $\eta \in \mathcal{F}$,

$$\sigma(g_2 g_1, \eta) = \sigma(g_2, g_1\eta) + \sigma(g_1, \eta).$$

Démonstration : Soient $g_1, g_2 \in G$ et $\eta \in \mathcal{F}$. Considérons $k_0, k_1, k_2 \in K$ tels que $\eta = k_0\eta_0$ et $g_1\eta = k_1\eta_0$ et $g_2g_1\eta = k_2\eta_0$. Écrivons la décomposition d'Iwasawa de $g_2g_1k_0$ grâce à celle de g_1k_0 et g_2k_1.

Par décomposition d'Iwasawa de g_1k_0 et puisque $g_1k_0\eta_0 = k_1\eta_0$, il existe $n_1 \in N$ tel que

$$g_1k_0 = k_1 \exp(\sigma(g_1, \eta))n_1.$$

De même, il existe $n_2 \in N$ tel que

$$g_2k_1 = k_2 \exp(\sigma(g_2, k_1\eta_0))n_2.$$

D'où

$$g_2 g_1 k_0 = k_2 \exp(\sigma(g_2, g_1\eta)) n_2 \exp(\sigma(g_1, \eta)) n_1.$$

Posons $n_2' := \exp(-\sigma(g_1, \eta)) n_2 \exp(\sigma(g_1, \eta))$. Comme A normalise N, alors $n_2' \in N$ et

$$g_2 g_1 k_0 = k_2 \exp(\sigma(g_2, g_1\eta) + \sigma(g_1, \eta)) n_2' n_1$$

est la décomposition d'Iwasawa de $g_2 g_1 k_0$. Par unicité de la décomposition, on en déduit la relation de cocycle

$$\sigma(g_2 g_1, \eta) = \sigma(g_2, g_1\eta) + \sigma(g_1, \eta).$$

□

2.2.3 Décomposition de Jordan

Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact. Rappelons qu'un élément de G est *unipotent* si toutes ses valeurs propres sont égales à 1, ou, de manière équivalente, si c'est l'exponentielle d'un élément nilpotent de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Un élément est *semisimple* s'il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ou de manière équivalente si tout sous-espace vectoriel réel invariant admet un supplémentaire invariant. Un élément semisimple est *elliptique* (resp. *hyperbolique*) si ses valeurs propres complexes sont toutes de module 1 (resp. réelles). Cela revient à dire qu'un élément est elliptique (resp. hyperbolique, unipotent) si et seulement si il est conjugué à un élément du sous-groupe K (resp. A, N).

Théorème 2.27. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact.*

Alors pour tout $g \in G$, il existe $g_e, g_h, g_u \in G$, tels que

(i) g_e (resp g_h, g_u) est elliptique (resp. hyperbolique, unipotent),

(ii) les éléments commutent deux à deux,

(iii) $g = g_e g_h g_u$.

De plus, une telle décomposition, appelée décomposition de Jordan*, est unique.*

Définition 2.28. *Pour tout $g \in G$, la* projection de Jordan *g est l'unique élément $\lambda(g) \in \mathfrak{a}^+$ tel que la partie hyperbolique de g est conjuguée à $\exp(\lambda(g))$. L'application $\lambda : G \to \mathfrak{a}^+$ ainsi définie est la* projection de Jordan*.*

Lemme 2.29 (Corollaire 5.34 [BQ16b])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact. Alors pour tout $g \in G$,*

$$\lim_{n+\infty} \frac{1}{n} \kappa(g^n) = \lambda(g).$$

Définition 2.30. *Un élément est dit* loxodromique*, si sa projection de Jordan est à valeurs dans l'intérieur la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^{++}$. Notons G^{lox} le sous-ensemble de G constitué des éléments loxodromiques.*

Dans la Proposition suivante, on prouve, entre autres, que la partie unipotente de tout élément loxodromique est triviale, la partie elliptique de tout élément loxodromique est conjuguée à un élément de $M = Z_K(A)$.

Proposition 2.31. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire, de type non-compact.*

Alors pour tout $g \in G^{lox}$, il existe un couple $(h_g, m_g) \in G \times M$ tel que

$$g = h_g m_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1}.$$

De plus, pour tout $(h'_g, m'_g) \in G \times M$ tel que $g = h'_g m'_g e^{\lambda(g)} h'^{-1}_g$, il existe un unique $c \in MA$ tel que

$$h'_g = h_g c \text{ et } m'_g = c^{-1} m_g c.$$

Preuve : Soit $g \in G^{lox}$ un élément loxodromique. Écrivons la décomposition de Jordan de g. Il existe $g_e, g_h, g_u \in G$ commutant deux à deux, avec g_e elliptique, g_h hyperbolique et g_u unipotent tels que

$$g = g_e g_h g_u.$$

Soit $h_g \in G$ un élément qui diagonalise la partie hyperbolique g_h i.e. tel que

$$g_h = h_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1}.$$

Alors

$$h_g^{-1} g h_g = (h_g^{-1} g_e h_g)(h_g^{-1} g_h h_g)(h_g^{-1} g_u h_g)$$

est la décomposition de Jordan de $h_g^{-1} g h_g$. Notons $m_g = h_g^{-1} g_e h_g$ et $u_g = h_g^{-1} g_u h_g$, alors

$$h_g^{-1} g h_g = m_g e^{\lambda(g)} u_g,$$

et les éléments m_g et u_g et $e^{\lambda(g)}$ commutent deux à deux.

Prouvons maintenant que si un élément $c \in G$ commute avec $e^{\lambda(g)} \in A^{++}$, alors $c \in MA$. Soit un tel élément $c \in G$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$c e^{n\lambda(g)} = e^{n\lambda(g)} c.$$

En particulier, cela entraîne que la suite $(e^{-n\lambda(g)} c e^{n\lambda(g)})_{n \in \mathbb{Z}}$ stationne en c. D'après la Proposition 2.17 (iv), on en déduit en particulier que

$$c \in MAN \cap MAN^- = MA.$$

On en déduit que $u_g \in MA$ et $m_g \in MA$ ainsi que $m_g u_g \in MA$. Or comme u_g (resp. m_g) est la partie unipotente (elliptique) de $h_g^{-1} g h_g$, ses valeurs propres sont toutes égales à 1 (de module 1), on déduit

$$m_g u_g \in M.$$

En particulier, $u_g m_g = m_g \in M$ et $u_g = e_G$. On déduit

$$g = h_g m_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1}.$$

Soit maintenant $(h'_g, m'_g) \in G \times M$ tel que

$$g = h'_g m'_g e^{\lambda(g)} h'^{-1}_g.$$

Comme h'_g diagonalise g_h, on en déduit

$$h'_g e^{\lambda(g)} h'^{-1}_g = h_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1},$$

c'est-à-dire

$$h_g^{-1} h'_g e^{\lambda(g)} = e^{\lambda(g)} h_g^{-1} h'_g.$$

D'où $h_g^{-1} h'_g := c \in MA$. Enfin, par l'unicité de la décomposition d'Iwasawa de $h'^{-1}_g g h'_g$, on en déduit que

$$m'_g = c^{-1} m_g c.$$

□

2.2.4 Calculs explicites de décompositions

G	$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^k$	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$
K	$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$	$\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})^k$	$\begin{pmatrix}\alpha & -\overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$, $\lvert\alpha\rvert^2+\lvert\beta\rvert^2=1$
$\mathfrak{a}$	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\sum\limits_{1\le i\le n}\lambda_i=0$	$\left(\begin{pmatrix}t_i & 0\\ 0 & -t_i\end{pmatrix}\right)_{1\le i\le k}$, $t_i\in\mathbb{R}$	$\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & -t\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$
$\mathfrak{a}^+$	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_1\ge\ldots\ge\lambda_n$	$\left(\begin{pmatrix}t_i & 0\\ 0 & -t_i\end{pmatrix}\right)_{1\le i\le k}$, $t_i\ge 0$	$\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & -t\end{pmatrix}$, $t\ge 0$
M	$\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_n\end{pmatrix}$, $\varepsilon_i\in\{\pm1\}$	$(\pm I_2)^k$	$\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$, $\theta\in\mathbb{R}$
Π	(a_i-a_{i+1}), $i=1...n-1$	$a_1(i)-a_2(i)$, $i=1...k$	a_1-a_2
N	$\begin{pmatrix}1 & & (*)\\ & \ddots & \\ (0) & & 1\end{pmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix}1 & u_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)_{1\le i\le k}$, $u_i\mathbb{R}$	$\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{C}$

2.3 Éléments loxodromiques

Dans cette partie, je me base sur les articles d'Y. Benoist [Ben96], [Ben97b], [Ben00], ainsi que le livre [BQ16b] pour étudier les propriétés dynamiques de l'action d'un groupe linéaire de matrices sur un espace vectoriel. En particulier, j'étudie les notions de proximalité. Ensuite, grâce à une famille canonique de représentations d'un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact, j'en déduis des propriétés dynamiques des éléments loxodromiques.

2.3.1 Proximalité dans $\mathrm{GL}(V)$

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une norme euclidienne. Notons $X=\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de V. On munit X de la distance suivante

$$\mathrm{d}(\mathbb{R}x,\mathbb{R}y)=\inf\{\|v_x-v_y\| \mid \|v_x\|=\|v_y\|=1,\ v_x\in\mathbb{R}x,\ v_y\in\mathbb{R}y\}.$$

Pour tout $x\in X$ et tout réel $r>0$, la boule ouverte de rayon r est notée $B(x,r)$. Pour tout sous-ensemble $Y\subset X$ et tout réel $r>0$, on pose

$$\mathcal{V}_r(Y):=\bigcup_{y\in Y}B(y,r).$$

L'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur l'espace projectif X est définie pour tout $x\in\mathbb{P}(V)$ et $g\in\mathrm{GL}(V)$ par

$$gx=\mathbb{R}(gv_x),$$

où $v_x\in x$ est un représentant dans V du point projectif x.

Avant de définir les endomorphismes proximaux, rappelons quelques notions de réduction des endomorphismes. Soit $g\in\mathrm{GL}(V)$, on note $\lambda_1(g)$ le rayon spectral de g. Pour tout $\Lambda\in\mathbb{C}$, rappelons que la suite de sous-espaces vectoriels (complexes) $\Big(\ker\big((g-\Lambda I)^n\big)\Big)_{n\ge1}$ est croissante et stationne à partir d'un certain rang.

Lorsque Λ est une valeur propre de g, le sous-espace vectoriel limite de cette suite est l'*espace caractéristique* de la valeur propre Λ, noté $V_\Lambda(g)$. On dit que la valeur propre $\Lambda \in \mathbb{R}$ est *simple* si $\dim(V_\Lambda(g)) = 1$.

Notons $\Lambda_1, ..., \Lambda_l$ les valeurs propres complexes de g, en prenant la convention $|\Lambda_i| \geq |\Lambda_j|$ dès que $i \leq j$. Alors V admet la décomposition en somme directe

$$V = \underset{1\leq i\leq l}{\oplus} V_{\Lambda_i}(g).$$

Remarquons de plus $|\Lambda_1| = \lambda_1(g)$.

Propriétés de contraction

Définition 2.32. *Un endomorphisme inversible $g \in \mathrm{GL}(V)$ est dit* proximal *sur X si Λ_1 est la seule valeur propre de module $\lambda_1(g)$ (elle est donc réelle) et si cette valeur propre est simple. Notons alors $V_+(g) := V_{\Lambda_1}(g)$ cette droite (réelle) attractive et $V_-(g) := \underset{2\leq i\leq l}{\oplus} V_{\Lambda_i}(g)$ son hyperplan supplémentaire stable par g.*

Dans l'espace projectif X, on note $x_+(g) := \mathbb{P}(V_+(g))$ le point attractif de l'action de g sur X et $X_-(g) := \mathbb{P}(V_-(g))$ le complémentaire de son bassin d'attraction (qui est aussi un hyperplan invariant et le bord du bassin d'attraction de $x_+(g)$).

Fait 2.33. *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie. Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément proximal et notons π_g la projection d'image $V_+(g)$ et de noyau $V_-(g)$.*

Alors la convergence suivante est exponentielle et en norme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g^n}{\Lambda_1^n}(I - \pi_g) = 0.$$

Preuve : Démontrons la convergence en norme sur V de la suite $\left(\frac{g^n}{\Lambda_1^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la projection π_g, d'image $V_+(g)$ et de noyau $V_-(g)$. Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{g^n}{\Lambda_1^n} = \pi_g + \frac{g^n}{\Lambda_1^n}(I - \pi_g).$$

Or par la formule du rayon spectral,

$$\|g^n_{|V_-(g)}\|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Lambda_2,$$

et par proximalité, $|\Lambda_2| < \lambda_1(g)$, d'où la convergence en norme, avec vitesse exponentielle

$$\frac{g^n}{\Lambda_1^n}(I - \pi_g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Décrivons l'action des éléments proximaux sur l'espace projectif.

Fait 2.34. *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie. Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément proximal. Alors le bassin d'attraction de $x_+(g)$ est $X \setminus X_-(g)$ i.e. pour tout $x \in X \setminus X_-(g)$,*

$$g^n x \underset{n+\infty}{\longrightarrow} x_+(g).$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout compact de $X \setminus X_-(g)$ et la vitesse de convergence est exponentielle.

Preuve. Prouvons la convergence uniforme sur tout compact de $X \setminus X_-(g)$. On démontre qu'il existe une suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{n+\infty} \delta_n = 0$ et pour tout compact $K \subset X \setminus X_-(g)$, il existe un réel R_K tel que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in K$,

$$\mathrm{d}(g^n x, x_+(g)) \leq R_K \delta_n.$$

Soit $x \in X \setminus X_-(g)$ et considérons $v_x \in V$ un représentant unitaire et la suite de signes $\left(\varsigma_n = \frac{\Lambda_1^n}{\lambda_1(g)^n}\right)_{n\geq 1}$, tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{d}(g^n x, x_+(g)) = \left\| \frac{g^n v_x}{\|g^n v_x\|} - \varsigma_n v_+(g) \right\|.$$

Remarquons que

$$\left\| \frac{g^n v_x}{\|g^n v_x\|} - \varsigma_n v_+(g) \right\| \leq \left\| \frac{g^n v_x}{\|g^n v_x\|} - \frac{g^n v_x}{\lambda_1(g)^n \|\pi_g(v_x)\|} \right\| + \left\| \frac{g^n v_x}{\lambda_1(g)^n \|\pi_g(v_x)\|} - \varsigma_n v_+(g) \right\|.$$

D'où pour tout $x \in X \setminus X_-(g)$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{d}(g^n x, x_+(g)) \leq \left| 1 - \frac{\|g^n v_x\|}{\lambda_1(g)^n \|\pi_g(v_x)\|} \right| + \frac{1}{\|\pi_g(v_x)\|} \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} (I - \pi_g)(v_x) \right\|.$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$1 - \frac{1}{\|\pi_g(v_x)\|} \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} (I - \pi_g) v_x \right\| \leq \frac{\|g^n v_x\|}{\lambda_1(g)^n \|\pi_g(v_x)\|} \leq 1 + \frac{1}{\|\pi_g(v_x)\|} \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} (I - \pi_g) v_x \right\|.$$

C'est-à-dire

$$-\frac{1}{\|\pi_g(v_x)\|} \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} (I - \pi_g) v_x \right\| \leq \frac{\|g^n v_x\|}{\lambda_1(g)^n \|\pi_g(v_x)\|} - 1 \leq \frac{1}{\|\pi_g(v_x)\|} \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} (I - \pi_g) v_x \right\|.$$

Ainsi,

$$\mathrm{d}(g^n x, x_+(g)) \leq \frac{2}{\|\pi_g(v_x)\|} \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} (I - \pi_g)(v_x) \right\|.$$

On en déduit que pour tout $x \in X \setminus X_-(g)$ et tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{d}(g^n x, x_+(g)) \leq 2 \frac{\|v_x - \pi_g(v_x)\|}{\|\pi_g(v_x)\|} \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} - \pi_g \right\|.$$

Pour tout compact $K \subset X \setminus X_-(g)$, on pose

$$R_K := 2 \sup_{x \in K} \frac{\|v_x - \pi_g(v_x)\|}{\|\pi_g(v_x)\|}.$$

Alors, pour tout $x \in K$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{d}(g^n x, x_+(g)) \leq R_K \left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} - \pi_g \right\|.$$

Grâce au Fait 2.33, la suite $\left(\left\| \frac{g^n}{\Lambda_1^n} - \pi_g \right\| \right)_{n\geq 1}$ converge exponentiellement vite vers 0, d'où le résultat. $\square$

Éléments $(r,\varepsilon)-$proximaux

Définition 2.35. *Soient $0<\varepsilon\leq r$ et $g\in \mathrm{GL}(V)$ un élément proximal. On dit qu'il est $(r,\varepsilon)-$proximal si*

(i) $\mathrm{d}(x_+(g),X_-(g))\geq 2r$,

(ii) $g\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^\complement\subset B(x_+(g),\varepsilon)$,

(iii) la restriction de g à $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^\complement$ est ε lipschitzienne.

Quelques remarques :

(i) c'est une notion qui dépend de la métrique choisie sur X (et dans notre cas de la norme euclidienne sur V),

(ii) si un élément est $(r,\varepsilon)-$proximal, alors pour tout $r'\in[\varepsilon,r]$ et $\varepsilon'\in[\varepsilon,r']$, il est $(r',\varepsilon')-$proximal

(iii) si g est $(r,\varepsilon)-$proximal, alors pour tout $n\geq 1$ l'élément g^n est $(r,\varepsilon)-$proximal (on pourrait penser que g^n est $(r,\varepsilon^n)-$proximal, mais on n'a a priori pas de garanties que $g^{-n}(B(x_+(g),\varepsilon))$ contienne $\mathcal{V}_{\varepsilon^n}(X_-(g))^\complement$).

Il existe des éléments proximaux qui ne sont $(r,\varepsilon)-$proximaux pour aucun r ni ε. Soit $\delta>0$, alors l'élément

$$h_\delta=\begin{pmatrix} e^\delta & & (0)\\ & 1 & \\ (0) & & e^{-\delta}\end{pmatrix}$$

est proximal, la distance entre $\mathbb{R}e_1$ et l'hyperplan $H:=Vect(e_2,e_3)$ est de $\sqrt{2}$. Posons $r:=\frac{1}{\sqrt{2}}$, alors, par définition, lorsque $e^{-\delta}>\frac{1}{\sqrt{2}}$, l'élément h_δ n'est $(r,\varepsilon)-$proximal pour aucun $\varepsilon\in]0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$. En effet, le point de coordonnée homogène

$$[\varepsilon:0:\sqrt{1-\varepsilon^2}]\in\mathcal{V}_\varepsilon(H)$$

est envoyé sur

$$[e^{2\delta}\varepsilon:0:\sqrt{1-\varepsilon^2}],$$

le lecteur ou la lectrice vérifiera que ce point n'est pas dans la boule projective $B(\mathbb{R}e_1,\varepsilon)$.

Le Lemme suivant apparaît dans [Ben96], [Ser16] en remarque. Nous le prouvons.

Lemme 2.36. *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie. Soit $g\in\mathrm{GL}(V)$ un élément proximal. Posons $r_0:=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x_+(g),X_-(g))$.*

Alors pour tout $r\in]0,r_0]$, pour tout $\varepsilon\in]0,r]$ il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$, l'élément g^n soit $(r,\varepsilon)-$proximal.

Grâce au Fait 2.34 que $X\setminus X_-(g)$ est le bassin d'attraction de $x_+(g)$, on déduit qu'à partir d'un certain rang, les éléments g^n vérifient les deux premiers points de la définition de $(r,\varepsilon)-$proximalité. L'existence du trou spectral entre la première valeur propre et les autres va permettre de justifier le caractère lipschitzien de la restriction de g^n au compact $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^\complement$ lorsque n est assez grand.

Pour cela, introduisons quelques notations. L'espace vectoriel V étant muni d'une norme euclidienne, on choisit une base $(e_j)_{1\leq j\leq\dim V}$ orthonormée pour cette norme. Posons

$$x_0:=\mathbb{P}(e_1),\quad H_0:=\mathbb{P}\Big(Vect(e_j)_{2\leq j\leq\dim V}\Big).$$

Rappelons que par le Théorème 2.13 de décomposition de Cartan sur $\mathrm{GL}(V)$, pour tout élément g il existe $k_g, l_g \in \mathrm{O}(V)$ et une matrice diagonale a_g de valeurs diagonales $(a_g(j))_{1\leq j\leq \dim V}$ avec $a_g(1) \geq a_g(2) \geq ... \geq a_g(\dim V)$ tels que

$$g = k_g a_g l_g.$$

Le Lemme suivant, qu'on admet, va jouer un rôle clé dans la preuve du Lemme 2.36. Nous ne rappelons pas la preuve, qui est une succession de calculs difficiles.

Lemme 2.37 (Breuillard-Gelander Lemme 3.4 [BG03])**.** *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie. Soient $r, \delta \in]0,1]$ et $g \in \mathrm{GL}(V)$. Si $\left|\frac{a_g(2)}{a_g(1)}\right| \leq \delta$, alors g est $\frac{\delta}{r^2}-$lipschitzienne sur $\mathcal{V}_r(l_g^{-1}H_0)^{\complement}$.*

Prouvons maintenant le Lemme 2.36.

Preuve du Lemme 2.36. Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément proximal et soit $\varepsilon \in]0, r_0]$. Démontrons que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, g^n est $(r_0, \varepsilon)-$proximale.

D'après le Fait 2.34, le bassin d'attraction de $x_+(g)$ est $X \setminus X_-(g)$ et la convergence de $g^n x$ vers $x_+(g)$ est uniforme sur tout compact. Comme $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^{\complement}$ est compact, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, alors $g^n\big(\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^{\complement}\big) \subset B(x_+(g), \varepsilon)$.

Il reste à démontrer que pour n assez grand, la restriction de g^n au compact $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^{\complement}$ est $\varepsilon-$lipschitzienne. Pour cela, on utilise le Lemme 2.37. Pour tout $n \geq 1$, considérons la décomposition de Cartan de g^n i.e. il existe $k_n, l_n \in \mathrm{O}(V)$ et a_n diagonale telle que $a_n(1) \geq ... \geq a_n(\dim V) > 0$ et

$$g^n = k_n a_n l_n.$$

Notons p_n la projection de norme 1 telle que le projectivisé de son image est $k_n x_0$ et le projectivisé de son noyau est $l_n^{-1}H_0$. Alors

$$\frac{g^n}{a_n(1)} = p_n + O\Big(\frac{a_n(2)}{a_n(1)}\Big).$$

Par la formule du rayon spectral du Lemme 2.29, on déduit $\lim\limits_{n+\infty}\left(\frac{a_n(2)}{a_n(1)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{|\Lambda_2|}{|\Lambda_1|}$. Or, g est proximale, donc $|\Lambda_2| < |\Lambda_1|$, ce qui permet de déduire

$$\lim_{n+\infty} \frac{a_n(2)}{a_n(1)} = 0.$$

D'après le Lemme 2.37, pour tout $n \geq 1$, la restriction de g^n à $\mathcal{V}_{\varepsilon/2}(l_n^{-1}H_0)^{\complement}$ et $\frac{a_n(2)}{a_n(1)}\frac{4}{\varepsilon^2}-$lipschitzienne. Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$\frac{a_n(2)}{a_n(1)}\frac{4}{\varepsilon^2} \leq \varepsilon.$$

Démontrons la convergence de la suite $(l_n^{-1}H_0)_{n\geq 1}$ vers $X_-(g)$. Soit p un point d'accumulation de la suite de projections $(p_n)_{n\geq 1}$. Notons x le projectivisé de son image et H le projectivisé de son noyau. Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que

$$\frac{g^{\varphi(n)}}{a_{\varphi(n)}(1)} - p = O\Big(\frac{a_{\varphi(n)}(2)}{a_{\varphi(n)}(1)}\Big).$$

En particulier, pour tout $y \in X \setminus \{X_-(g), H\}$

$$g^{\varphi(n)}y \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

D'après le Fait 2.34 et par unicité de la limite, on en déduit $x = x_+(g)$. De plus, par unicité du bord du bassin d'attraction de $x_+(g)$, on en déduit que pour tout point d'accumulation p de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{im}(p)) = x_+(g)$ et $\mathbb{P}(\ker(p)) = X_-(g)$. Ainsi, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_2$,

$$\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^\complement \subset \mathcal{V}_{\varepsilon/2}(l_n^{-1}H_0)^\complement.$$

Enfin, pour tout $n \geq \sup(n_0, n_1, n_2)$, l'élément g^n est bien $(r_0, \varepsilon)-$proximal puisque les trois conditions de proximalité sont vérifiées. □

Voici maintenant un critère de proximalité, dû à Tits [Tit71], on trouvera l'énoncé suivant dans [Ben00]. On admet ce critère.

Lemme 2.38 (Tits [Tit71])**.** *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie. Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g \in \mathrm{GL}(V)$. On suppose qu'il existe $x \in X$ et un hyperplan $Y \subset X$ tels que*

(i) $\mathrm{d}(x, Y) \geq 6r$,

(ii) $g\mathcal{V}_\varepsilon(Y)^\complement \subset B(x, \varepsilon)$,

(iii) la restriction $g_{|\mathcal{V}_\varepsilon(Y)^\complement}$ est $\varepsilon-$lipschitzienne.

Alors g est $(2r, 2\varepsilon)-$proximal avec $x_+(g) \in B(x, \varepsilon)$ et $X_-(g) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(Y)$.

Grâce à ce critère, on en déduit qu'en perturbant les éléments $(r, \varepsilon)-$proximaux par des petits éléments, on récupère des éléments $(r', \varepsilon')-$proximaux.

Corollaire 2.39. *Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément $(r, \varepsilon/2)-$proximal tel que $\mathrm{d}(x_+(g), X_-(g)) \geq 7r$.*

Alors pour tout $h \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $\|h-I\| \leq \varepsilon/2$, le produit gh est $(2r, 2\varepsilon)-$proximal, avec $x_+(gh) \in B(x_+(g), \varepsilon)$ et $X_-(gh) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))$.

Preuve . Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément $(r, \varepsilon/2)-$proximal et $h \in \mathrm{GL}(V)$ tel que

$$\|h - I\| \leq \varepsilon/2.$$

En tout point $x \in \mathbb{P}(V)$, notons $x^\perp$ l'hyperplan orthogonal associé à cette droite. Puisque h est une application linéaire, la différentielle de h au point x est la restriction de h à cet hyperplan $x^\perp$. Par inégalité triangulaire, la norme de la différentielle de h en x est au plus $(1 + \varepsilon/2)$. Ainsi, h est $(1 + \varepsilon/2)-$lipschitzienne sur $\mathbb{P}(V)$.
Remarquons que $gh\Big(h^{-1}\mathcal{V}_{\varepsilon/2}(X_-(g))^\complement\Big) \subset B(x_+(g), \varepsilon/2)$. De plus, comme

$$(1 + \varepsilon/2)\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

g est $(r, \varepsilon/2)-$proximale et h est $(1+\varepsilon/2)-$lipschitzienne, on en déduit que la restriction de gh à $h^{-1}\mathcal{V}_{\varepsilon/2}(X_-(g))^\complement$ est $\varepsilon-$lipschitzienne.

Comme $\|h - I\| \leq \varepsilon/2$, alors $h^{-1}\mathcal{V}_{\varepsilon/2}(X_-(g))^\complement$ contient le compact $\mathcal{V}_\varepsilon(h^{-1}X_-(g))^\complement$.

On en déduit que gh, restreinte au compact $\mathcal{V}_\varepsilon(h^{-1}X_-(g))^\complement$ est une application $\varepsilon-$lipschitzienne, à valeur dans $B(x_+(g), \varepsilon)$. De plus,

$$\mathrm{d}(x_+(g), h^{-1}X_-(g)) \geq \mathrm{d}(x_+(g), X_-(g)) - \varepsilon > 7r - \varepsilon \geq 6r.$$

Enfin, d'après le critère de proximalité du Lemme 2.38, gh est $(2r, 2\varepsilon)-$proximale avec $x_+(gh) \in B(x_+(g), \varepsilon)$. □

Projections de rang 1 Calculons la norme des projections de rang 1. Soit $H \subset \mathbb{P}(V)$ un hyperplan et $x \in \mathbb{P}(V) \setminus H$ un point. Notons $\pi_{x,H}$ la projection de rang 1 d'image x et de noyau l'hyperplan H. Soit $e_H^* \in V^*$ la forme linéaire unitaire de noyau H et considérons $v_x \in V$, unitaire tel que $\mathbb{R}v_x = x$. Alors pour tout $v \in V$,

$$\pi_{H,x}(v) = \frac{e_H^*(v)}{e_H^*(v_x)} v_x.$$

De plus,

$$\|\pi_{H,x}\| = \frac{1}{|e_H^*(v_x)|}.$$

Remarquons que

$$\lim_{x \to H} \|\pi_{H,x}\| = +\infty.$$

Rayon spectral d'un produit d'éléments proximaux

Lemme 2.40. *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie. Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément proximal. Notons π_g le projecteur de noyau $V_-(g)$ et d'image $V_+(g)$.*

Alors pour tout point projectif $x \in X \setminus X_-(g)$ et pour tout représentant $v_x \in V$ de norme 1, la suite $\left(\log \frac{\|g^n v_x\|}{\lambda_1(g)^n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\log \|\pi_g(v_x)\| = \log \left(\frac{|e^*_{X_-(g)}(v_x)|}{|e^*_{X_-(g)}(v_{x_+(g)})|}\right)$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que la limite ne dépend pas du choix du représentant v_x de norme 1. On rappelle que d'après le Fait 2.33, la suite $\left(\frac{g^n}{\Lambda_1^n} - \pi_g\right)_{n \geq 1}$ converge en norme, exponentiellement vite.

Donc pour tout $v \in V$, unitaire, tel que $\pi_g(v) \neq 0$, la suite $\left(\frac{\|g^n v\|}{\lambda_1(g)^n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\|\pi_g(v)\| > 0$. On en déduit que pour tout $x \in X \setminus X_-(g)$ et pour tout représentant unitaire $v_x \in V$, la suite $\left(\log \frac{\|g^n v_x\|}{\lambda_1(g)^n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\log \|\pi_g(v_x)\|$. □

Définition 2.41. *Pour tout hyperplan $H \subset X$, pour tout $x, y \in X \setminus H$, on définit*

$$\nu_1(H; x, y) := \log \left(\frac{|e_H^*(v_y)|}{|e_H^*(v_x)|}\right) = \log \|\pi_{x,H}(v_y)\|.$$

Ce nombre ne dépend pas du choix des représentants unitaires $v_x, v_y \in V$ de x et y.

Soit $r > 0$ et $\varepsilon \in]0, r]$, on définit

$$C_{r,\varepsilon} := \sup_H \sup\{\nu_1(H; x, y) \mid \mathrm{d}(x, H) \geq 2r \text{ et } y \in B(x, \varepsilon)\},$$

où $H \subset X$ varie dans le sous-ensemble des hyperplans de X.

Pour tout élément $g \in \mathrm{GL}(V)$ proximal, pour tout $x \in X \setminus X_-(g)$, On note

$$\nu_1(g, x) := \nu_1(X_-(g); x_+(g), x).$$

Pour tout élément proximal $g \in \mathrm{GL}(V)$, alors $\nu_1(g, x_+(g)) = 0$. La fonction ν_1 est par définition continue sur son ensemble de définition. De plus, pour tout hyperplan $H \subset X$, pour tout $x, y, z \in X \setminus H$,

$$\nu_1(H; x, z) = \nu_1(H; x, y) + \nu_1(H; y, z).$$

Ces quantités apparaîtront comme termes d'erreurs dans les estimées utilisées au chapitre 6.

Lemme 2.42. *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie. Alors*

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} C_{r,\varepsilon} = 0$,

(ii) pour tout élément (r, ε)−proximal $g \in \mathrm{GL}(V)$, pour tout $x \in \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^{\complement}$ et pour tout représentant unitaire $v_x \in V$, alors pour tout entier $n \geq 1$

$$\left| \log \frac{\|g^n v_x\|}{\lambda_1(g)^n} - \nu_1(g, x) \right| \leq C_{r,\varepsilon}.$$

(iii) pour tout élément (r, ε)−proximal $g \in \mathrm{GL}(V)$, pour tout $x \in \mathcal{V}_{6r}(X_-(g))^{\complement}$ et tout $y \in B(x, \varepsilon)$,

$$|\nu_1(g, x) - \nu_1(g, y)| \leq C_{r,\varepsilon}.$$

Preuve : Prouvons (i), i.e. que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} C_{r,\varepsilon} = 0$. Pour tout hyperplan $H \subset X$, posons

$$C_{r,\varepsilon}(H) := \sup\{\nu_1(H; x, y) \mid \mathrm{d}(x, H) \geq 2r \text{ et } y \in B(x, \varepsilon)\}.$$

Remarquons que par invariance du sous-groupe compact $\mathrm{O}(V)$, pour tout hyperplan $H \subset X$, alors

$$C_{r,\varepsilon}(H) = C_{r,\varepsilon}.$$

Par définition,

$$C_{r,\varepsilon} = \sup \left\{ \left| \log \frac{|e_H^*(v_y)|}{|e_H^*(v_x)|} \right| \;\middle|\; x \in \mathcal{V}_{2r}(H)^{\complement},\ y \in B(x, \varepsilon) \right\}.$$

Or $\log(1 + t) \leq t$, donc pour tout $x \in \mathcal{V}_{2r}(\mathbb{P}(H))^{\complement}$ et $y \in B(x, \varepsilon)$,

$$\log \frac{|e_H^*(v_y)|}{|e_H^*(v_x)|} \leq \sup_{y \in B(x,\varepsilon)} \{|e_H^*(v_y)| - |e_H^*(v_x)|\} \frac{1}{|e_H^*(v_x)|}.$$

D'une part pour tout $x \in \mathcal{V}_{2r}(\mathbb{P}(H))^{\complement}$ et pour tout représentant unitaire $v_x \in V$,

$$|e_H^*(v_x)| \geq 2r,$$

d'où

$$\frac{1}{|e_H^*(v_x)|} \leq \frac{1}{2r}.$$

D'autre part, la fonction $z \mapsto |e_H^*(v_z|$ est uniformément continue sur tout compact de $X \setminus H$, donc la famille de constantes d'uniforme continuité

$$\delta_{r,\varepsilon} := \sup \left\{ |e_H^*(v_y)| - |e_H^*(v_x)| \;\middle|\; x \in \mathcal{V}_{2r}(H)^{\complement},\ y \in B(x, \varepsilon) \right\},$$

vérifie bien $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{r,\varepsilon} = 0$, pour tout $r > 0$.

On en déduit que

$$C_{r,\varepsilon} \leq \frac{\delta_{r,\varepsilon}}{2r},$$

d'où le point (i).

Prouvons (ii). Pour tout $r > 0$ et tout $\varepsilon \in]0, r]$, remarquons que par définition,

$$C_{r,\varepsilon} := \sup\{\nu_1(g, x) \mid g \in \mathrm{GL}(V) \text{ est } (r, \varepsilon) - \text{proximale et } x \in B(x_+(g), \varepsilon)\}.$$

En effet, soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément $(r,\varepsilon)-$proximal. Alors $g\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^{\complement} \subset B(x_+(g),\varepsilon)$, donc

$$\Big|\log\frac{\|g^n v_x\|}{\lambda_1(g)^n} - \nu_1(g,x)\Big| \le \sup_{y\in B(x_+(g),\varepsilon)} \nu_1(g,y) \le C_{r,\varepsilon}.$$

D'où (ii).

Prouvons (iii), écrivons

$$\begin{aligned}
\nu_1(g,y)-\nu_1(g,x) &= \nu_1(X_-(g);x_+(g),y) - \nu_1(X_-(g);x_+(g),x)\\
&= \log\left(\frac{\|e^*_{X_-(g)}(v_y)\|}{\|e^*_{X_-(g)}(v_{x_+(g)})\|}\right) - \log\left(\frac{\|e^*_{X_-(g)}(v_x)\|}{\|e^*_{X_-(g)}(v_{x_+(g)})\|}\right)\\
&= \log\left(\frac{\|e^*_{X_-(g)}(v_y)\|}{\|e^*_{X_-(g)}(v_x)\|}\right)\\
&= \nu_1(X_-(g);x,y).
\end{aligned}$$

Par définition de $C_{r,\varepsilon}$, pour tout $x,y\in\mathcal{V}_{2r}(X_-(g))^{\complement}$ tels que $\mathrm{d}(x,y)\le\varepsilon$,

$$|\nu_1(X_-(g);x,y)| \le C_{r,\varepsilon}.$$

D'où le point (iii). □

Retraduisons le point (ii), pour tout élément $(r,\varepsilon)-$proximal $g\in\mathrm{GL}(V)$, notons π_g la projection de noyau $V_-(g)$ et d'image $x_+(g)$. Alors pour tout $x\in\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^{\complement}$ et pour tout représentant unitaire $v_x\in V$,

$$\Big|\log\frac{\|gv_x\|}{\lambda_1(g)} - \log\|\pi_g(v_x)\|\Big| \le C_{r,\varepsilon}.$$

Comparons le rayon spectral avec la norme d'éléments $(r,\varepsilon)-$proximaux.

Lemme 2.43. *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie et soit $0<\varepsilon\le r$. Soit $g\in\mathrm{GL}(V)$ un élément $(r,\varepsilon)-$proximal, notons π_g la projection de noyau $V_-(g)$ et d'image $x_+(g)$.*

Alors,

$$\Big\|\frac{g_{|V_-(g)}}{\lambda_1(g)}\Big\| \le e^{C_{r,\varepsilon}}\|\pi_g\|\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

De plus, pour tout $r\in]0,1/2]$ et $\varepsilon\in]0,r]$, pour tout élément $(r,\varepsilon)-$proximal g,

$$\log\frac{\|g\|}{\lambda_1(g)} \le \log\frac{1}{2r} + \Big(1+\frac{1}{2r}\Big)e^{C_{r,\varepsilon}}\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Donnons un exemple d'élément proximal où le point fixe attractif est très proche de son hyperplan répulsif.

$$g = \begin{pmatrix} 3 & 10^3 & 0\\ & 2 & 0\\ (0) & & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Alors pour tout entier $n\ge1$

$$g^n = \begin{pmatrix} 3^n & P_n & 0\\ & 2^n & 0\\ (0) & & \frac{1}{6^n}\end{pmatrix},$$

où $P_n > 10^3 3^{n-1}$. Grâce au Lemme 2.36, lorsque n est grand, cet élément devient $(r,\varepsilon)-$proximal pour r bien choisi, mais sa norme varie comme P_n. On vérifie que $\log\frac{\|g^n\|}{\lambda_1(g^n)} \ge \log(10^3) - \log 3$.

Démonstration : Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ un élément $(r,\varepsilon)-$proximal.

Prouvons d'abord la première inégalité. D'après le point (ii) du Lemme 2.42 précédent, pour tout $x \in \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^\complement$ et pour tout représentant unitaire $v_x \in V$,

$$\Big|\log\frac{\|gv_x\|}{\lambda_1(g)} - \log\|\pi_g(v_x)\|\Big| \leq C_{r,\varepsilon}.$$

Par conséquent pour tout $v \in V$ unitaire tel que $|e^*_{X_-(g)}(v)| \geq \varepsilon$,

$$e^{-C_{r,\varepsilon}}\|\pi_g(v)\| \leq \frac{\|gv\|}{\lambda_1(g)} \leq \|\pi_g(v)\|e^{C_{r,\varepsilon}}.$$

Notons p la projection orthogonale de noyau $X_-(g)$. Comme p est orthogonale, on en déduit que

$$\Big\|\frac{g_{|V_-(g)}}{\lambda_1(g)}\Big\| = \Big\|\frac{g(I-p)}{\lambda_1(g)}\Big\|.$$

Pour tout $v \in V$ unitaire tel que $\|p(v)\| = |e^*_{X_-(g)}(v)| = \varepsilon$, majorons $\|g(I-p)(v)\|$,

$$g(I-p)v = gv - g(pv),$$

d'où

$$\frac{\|g(I-p)(v)\|}{\lambda_1(g)} \leq \frac{\|gv\|}{\lambda_1(g)} + \frac{\|g(pv)\|}{\lambda_1(g)}.$$

La distance entre $\mathbb{R}p(v)$ et $X_-(g)$ est de $\sqrt{2}$ puisque la projection p est orthogonale. Par conséquent, $\mathbb{R}pv \in \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g))^\complement$. Donc

$$\frac{\|g(I-p)(v)\|}{\lambda_1(g)} \leq \|\pi_g(v)\|e^{C_{r,\varepsilon}} + \|\pi_g(pv)\|e^{C_{r,\varepsilon}}.$$

Comme p et π_g sont des projecteurs de rang 1 de même noyau et que p est orthogonale,

$$\|\pi_g(p(v))\| = \|p(v)\|\|\pi_g\|.$$

Or $\|p(v)\| = \varepsilon$, donc $\|\pi_g(p(v))\| = \varepsilon\|\pi_g\|$. D'où

$$\begin{aligned}\frac{\|g(I-p)(v)\|}{\lambda_1(g)} &\leq \|\pi_g(v)\|e^{C_{r,\varepsilon}} + \varepsilon\|\pi_g\|e^{C_{r,\varepsilon}}\\ &\leq \|\pi_g\|e^{C_{r,\varepsilon}} + \varepsilon\|\pi_g\|e^{C_{r,\varepsilon}}\\ &\leq \|\pi_g\|e^{C_{r,\varepsilon}}(1+\varepsilon).\end{aligned}$$

Or $\|g(I-p)\| = \sup_{v \in V_-(g)\setminus 0} \frac{\|g(I-p)(v)\|}{\|(I-p)(v)\|}$, d'où pour tout $u \in V$, tel que $\|p(u)\| < 1$,

$$\|g(I-p)\| = \sup_{v \in u+V_-(g)} \frac{\|g(I-p)(v)\|}{\|(I-p)(v)\|}.$$

En particulier pour tout point $v \in V$ unitaire variant dans les hyperplans affines $\|p(u)\| = \varepsilon$, alors $\|v - p(v)\| = \sqrt{1-\varepsilon^2}$, on en déduit

$$\|g(I-p)\| \leq \lambda_1(g)\|\pi_g\|e^{C_{r,\varepsilon}}(1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

C'est-à-dire

$$\Big\|\frac{g_{|V_-(g)}}{\lambda_1(g)}\Big\| \leq e^{C_{r,\varepsilon}}\|\pi_g\|\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Prouvons maintenant la seconde inégalité.

$$\|g\| \leq \|g\pi_g\| + \|g(I - \pi_g)\|.$$

Or $\|g\pi_g\| = \lambda_1(g)\|\pi_g\|$. En divisant à gauche et à droite par $\lambda_1(g)\|\pi_g\|$ et en appliquant l'inégalité $\log(1+t) \leq t$, pour $t = \frac{\|g(I-\pi_g)\|}{\lambda_1(g)\|\pi_g\|}$, on obtient

$$\log \frac{\|g\|}{\lambda_1(g)\|\pi_g\|} \leq \frac{\|g(I - \pi_g)\|}{\lambda_1(g)\|\pi_g\|} \leq \frac{\|g_{|V_-(g)}\|}{\lambda_1(g)\|\pi_g\|}\|I - \pi_g\|.$$

Enfin par inégalité triangulaire,

$$\log \frac{\|g\|}{\lambda_1(g)\|\pi_g\|} \leq e^{C_{r,\varepsilon}} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\Big(1 + \|\pi_g\|\Big).$$

Rappelons que la norme de π_g est $\|\pi_g\| = \frac{1}{|e^*_{X_-(g)}(v_{x_+(g)})|}$. Puisque g est $(r,\varepsilon)-$proximale, $|e^*_{X_-(g)}(v_{x_+(g)})| = \mathrm{d}(x_+(g), X_-(g)) \geq 2r$, donc

$$\|\pi_g\| \leq \frac{1}{2r},$$

d'où

$$\log \frac{\|g\|}{\lambda_1(g)\|\pi_g\|} \leq \Big(1 + \frac{1}{2r}\Big)e^{C_{r,\varepsilon}} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Enfin, par croissance du logarithme

$$\log \|\pi_g\| \leq \log \frac{1}{2r},$$

on en déduit le résultat voulu

$$\log \frac{\|g\|}{\lambda_1(g)} \leq \log \frac{1}{2r} + \Big(1 + \frac{1}{2r}\Big)e^{C_{r,\varepsilon}} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

□

Les Lemmes 2.38 et 2.40 vont nous permettre de retrouver la propriété classique suivante.

Proposition 2.44 (Lemme 1.4 [Ben00]). *Soit V un espace vectoriel réel, euclidien de dimension finie.*

Pour toute suite d'éléments $(r,\varepsilon)-$proximaux $g_1, .., g_l \in \mathrm{GL}(V)$ tels que $\mathrm{d}(x_+(g_{i-1}), X_-(g_i)) \geq 6r$ pour tout $i = 1, ..., l$, notons $g_0 = g_l$ et $\nu_1 := \nu_1(g_l, x_+(g_{l-1})) + ... + \nu_1(g_1, x_+(g_0))$.

Alors pour tout $(n_i)_{1\leq i\leq l} \in (\mathbb{N}^*)^l$,

$$\Big|\log(\lambda_1(g_l^{n_l}...g_1^{n_1})) - \sum_{1\leq i\leq l} n_i \log(\lambda_1(g_i)) - \nu_1\Big| \leq 2lC_{r,\varepsilon}.$$

De plus, l'endomorphisme $w := g_l^{n_l}...g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)-$proximal avec

$$x_+(w) \in B(x_+(g_l), \varepsilon) \text{ et } X_-(w) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_1)).$$

Nous rappelons la preuve car cette Proposition est centrale pour prouver les résultats intermédiaires des Chapitres 5 et 6. De plus, au chapitre 4, nous utiliserons des arguments similaires pour prouver la Proposition 4.50.

Preuve . Soit $n_1, ..., n_l \geq 1$ et supposons que $\varepsilon \in]0, r]$ avec $\varepsilon < 1$.

Prouvons par récurrence sur l que $w = g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)-$proximal et vérifie $x_+(w) \in B(x_+(g_l), \varepsilon)$ et $X_-(w) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_1))$.

On utilise le critère de proximalité donné par le Lemme 2.38.
Comme $g_1^{n_1}$ est $(r, \varepsilon)-$proximal, sa restriction à $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_1))^{\complement}$ est $\varepsilon-$lipschitz à valeurs dans $B(x_+(g_1), \varepsilon)$.
Supposons maintenant que pour un certain $1 \leq i \leq l$, la restriction de l'élément $g_i^{n_i} ... g_1^{n_1}$ soit $\varepsilon-$lipschitzienne sur $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_1))^{\complement}$ à valeurs dans $B(x_+(g_i), \varepsilon)$. Comme $\mathrm{d}(x_+(g_i), X_-(g_{i+1})) \geq 6r$ et $\varepsilon \in]0, r]$, on en déduit que $B(x_+(g_i), \varepsilon) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_{i+1}))^{\complement}$. Utilisons à nouveau la $(r, \varepsilon)-$proximalité de $g_{i+1}^{n_{i+1}}$, sa restriction à $B(x_+(g_i), \varepsilon)$ est $\varepsilon-$lipschitzienne et $g_{i+1}^{n_{i+1}} B(x_+(g_i), \varepsilon) \subset B(x_+(g_{i+1}), \varepsilon)$. En utilisant $\varepsilon < 1$, on en déduit que la restriction de l'élément $g_{i+1}^{n_{i+1}} ... g_1^{n_1}$ est $\varepsilon-$lipschitzienne sur $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_1))^{\complement}$ à valeurs dans $B(x_+(g_{i+1}), \varepsilon)$.
D'où, par récurrence, w restreinte à $\mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_1))^{\complement}$ est $\varepsilon-$lipschitzienne à valeurs dans $B(x_+(g_l), \varepsilon)$.

Par hypothèse, $\mathrm{d}(x_+(g_l), X_-(g_1)) \geq 6r$, donc d'après le Lemme 2.38, l'élément w est $(2r, 2\varepsilon)-$proximal, avec $x_+(w) \in B(x_+(g_l), \varepsilon)$ et $X_-(w) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_1))$.

Maintenant, on utilise le Lemme 2.40 pour estimer

$$\log(\lambda_1(w)) = |\log \|w v_{x_+(w)}\||.$$

Posons $v_0 = v_{x_+(w)}$ et pour tout $i = 1...l$,

$$v_i = \frac{g^{n_i} v_{i-1}}{\|g^{n_i} v_{i-1}\|}.$$

De même qu'au paragraphe précédent, on prouve que pour tout $i = 1...l$

$$\mathbb{R}v_{i-1} \in B(x_+(g_{i-1}), \varepsilon) \subset \mathcal{V}_{2r}(X_-(g_i))^{\complement}.$$

On écrit

$$\begin{aligned} \log \|g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} v_0\| &= \log \|g_l^{n_l} v_{l-1}\| + ... + \log \|g_1^{n_1} v_0\| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq l} \log \|g_i^{n_i} v_{i-1}\| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq l} \log \frac{\|g_i^{n_i} v_{i-1}\|}{\lambda_1(g_i^{n_i})} + \log(\lambda_1(g_i^{n_i})). \end{aligned}$$

On applique le point (ii) du Lemme 2.42, comme $\mathbb{R}v_{i-1} \in B(x_+(g_{i-1}), \varepsilon) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(X_-(g_i))^{\complement}$, pour tout $i = 1...l$. D'où

$$\left| \log \frac{\|g_i^{n_i} v_{i-1}\|}{\lambda_1(g_i^{n_i})} - \nu_1(g_i, \mathbb{R}v_{i-1}) \right| \leq C_{r,\varepsilon}.$$

Ensuite, on applique le point (iii), puisque $\mathrm{d}(x_+(g_{i-1}), X_-(g_i)) \leq 6r$ pour tout $i = 1...l$. D'où

$$|\nu_1(g_i, \mathbb{R}v_{i-1}) - \nu_1(g_i, x_+(g_{i-1}))| \leq C_{r,\varepsilon}.$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit pour tout $i = 1...l$,

$$\left| \log \frac{\|g_i^{n_i} v_{i-1}\|}{\lambda_1(g_i^{n_i})} - \nu_1(g_i, x_+(g_{i-1})) \right| \leq 2C_{r,\varepsilon}.$$

D'où

$$\left| \log(\lambda_1(w)) - \sum_{1 \leq i \leq l} n_i \log(\lambda_1(g_i)) - \sum_{1 \leq i \leq l} \nu_1(g_i, x_+(g_{i-1})) \right| \leq 2lC_{r,\varepsilon}.$$

□

La Proposition précédente permet de définir des sous-semigroupes dont tous les éléments sont proximaux avec un contrôle uniforme sur la distance entre les points attractifs et les hyperplans répulsifs de tous les éléments du sous-semigroupe, ainsi que sur les coefficients de contraction.

Définition 2.45. *Soient $r > 0$ et $\varepsilon \in]0, r]$ et soit $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-semigroupe. On dit que Γ est* fortement $(r, \varepsilon)-$Schottky *si*

(i) tout élément de Γ est $(r, \varepsilon)-$proximal,

(ii) pour tout $h, h' \in \Gamma$, on a $\mathrm{d}(x_+(h), X_-(h')) \geq 6r$.

2.3.2 Représentations d'un groupe de Lie semisimple

Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe et de type non-compact. Soit (V, ρ) une représentation de G dans un espace vectoriel réel de dimension finie. Dans la partie 2.2.1, on avait défini les racines restreintes pour la représentation adjointe de G. Faisons de même pour la représentation (V, ρ). Pour tout caractère réel $\chi : A \to \mathbb{R}$, notons l'espace propre associé

$$V^\rho_\chi := \{v \in V \mid \forall a \in A,\ \rho(a)v = \chi(a)v\}.$$

Le sous-ensemble des *poids restreints* de V est le sous-ensemble

$$\Sigma(\rho) := \{\chi \mid V_\chi \neq 0\}.$$

Les racines sont les poids de la représentation adjointe. Comme A est abélien, la famille d'endomorphismes $(\rho(a))_{a\in A}$ est commutative, on la diagonalise. Ainsi, on en déduit la décomposition en espaces propres

$$V = \bigoplus_{\chi\in\Sigma(\rho)} V^\rho_\chi.$$

Si χ est un caractère de A, sa différentielle en l'identité est une forme linéaire de $\mathfrak{a}$. On la note $\mathrm{d}\chi$. Munissons maintenant l'ensemble des poids restreints de l'ordre partiel suivant

$$\big(\ \chi_1 \leq \chi_2\ \big) \iff \big(\ \forall a \in \mathfrak{a}^+, \quad \mathrm{d}\chi_1(a) \leq \mathrm{d}\chi_2(a)\ \big).$$

Lorsque la représentation ρ est irréductible, l'ensemble des poids restreints $\Sigma(\rho)$ admet un maximum, le *poids restreint maximal* noté χ^ρ_{max}. Pour alléger les notations, pour toute représentation irréductible (V, ρ), le sous-espace propre du poids maximal restreint est noté $V^\rho_+ := V^\rho_{\chi^\rho_{max}}$ et son supplémentaire $A-$invariant est noté H^ρ_- i.e.

$$H^\rho_- := \bigoplus_{\chi\in\Sigma(\rho)\setminus\{\chi^\rho_{max}\}} V^\rho_\chi.$$

On dit que la représentation irréductible ρ est *proximale* lorsque $\dim(V^\rho_+) = 1$. Cela entraine en particulier que pour tout $a \in A^{++}$, l'endomorphisme $\rho(a) \in \mathrm{GL}(V)$ est proximal.

Le Lemme suivant est dû à Tits, l'énoncé qui est donné est celui de [BQ16b, Lemme 5.32]. Rappelons que $\Sigma \subset \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des racines de G, le sous-ensemble $\Pi = \{\alpha_1, .., \alpha_r\}$ est l'ensemble des racines simples positives. Le bord de Furstenberg est noté $\mathcal{F} := G/MAN$, avec $\eta_0 := MAN$ et $\check{\eta}_0 := k_\iota\eta_0$. Pour tout $\eta \in \mathcal{F}$, il existe, par décomposition d'Iwasawa, un élément $k_\eta \in K$ tel que $\eta = k_\eta\eta_0$. De plus, un tel choix $k_\eta \in K$ est défini modulo multiplication à droite par M.

Lemme 2.46 (Tits [Tit71]). *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire.*

Alors pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$, il existe une représentation irréductible et proximale (ρ_α, V^α) de G telle que pour tout racine simple $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$, l'élément $\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}$ soit orthogonal à β.

De plus, $(\mathrm{d}\chi^\alpha_{max})_{\alpha\in\Pi}$ est une base de l'espace dual $\mathfrak{a}^*$. Pour tout $\eta \in \mathcal{F}$, posons $y^\alpha(\eta) := \rho_\alpha(k_\eta)V^\alpha_+$, alors l'application

$$\begin{aligned} y : \mathcal{F} &\longrightarrow \prod_{\alpha\in\Pi} \mathbb{P}(V^\alpha) \\ \eta &\longmapsto (y^\alpha(\eta))_{\alpha\in\Pi} \end{aligned}$$

est un plongement du bord de Furstenberg $\mathcal{F}$ dans ce produit d'espaces projectifs.

En particulier, d'après [BQ16b, paragraphe 5.8] les différentielles en l'identité des poids restreints de la représentation ρ_α sont dans l'ensemble suivant

$$\Big\{\mathrm{d}\chi^\alpha_{max},\ \mathrm{d}\chi^\alpha_{max} - \alpha,\ \mathrm{d}\chi^\alpha_{max} - \alpha - \sum_{\beta\in\Pi\setminus\alpha} n_\beta\beta \ \Big|\ (n_\beta)_{\beta\in\Pi\setminus\alpha} \subset \mathbb{N}\Big\},$$

des formes linéaires de $\mathfrak{a}$.

Rappelons que

$$\mathcal{F}^{(2)} := \{(g\eta_0, g\check{\eta}_0) \mid g \in G\}$$

est l'ensemble des points en position générale. D'après la Proposition 2.22 l'application $G-$équivariante

$$\begin{aligned} G/AM &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)} \\ gAM &\longmapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. Pour tout $\eta \in \mathcal{F}$, rappelons que $\mathcal{X}(\eta) \subset \mathcal{F}$ désigne l'ensemble des points non transverses à η, i.e. $\mathcal{X}(\eta) := \left(\check{k}_\eta N^-\eta_0\right)^{\complement}$ où $\check{k}_\eta \in K$ est tel que $\check{k}_\eta\check{\eta}_0 = \eta$.

Définissons maintenant une application duale $Y : \mathcal{F} \to \prod_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Gr}_{\dim V^\alpha - 1}(V^\alpha)$. Pour tout $\xi \in \mathcal{F}$, considérons $\check{k}_\xi \in K$ tel que $\xi = \check{k}_\xi\check{\eta}_0$. Notons $Y^\alpha(\xi) := \rho_\alpha(\check{k}_\xi)H^\alpha_-$. Ce sous-espace vectoriel ne dépend pas du choix du représentant dans $\check{k}_\xi M$. On définit l'application duale

$$\begin{aligned} Y : \mathcal{F} &\longrightarrow \prod_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Gr}_{\dim V^\alpha - 1}(V^\alpha) \\ \xi &\longmapsto (Y^\alpha(\xi))_{\alpha\in\Pi}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \prod_{\alpha\in\Pi} \mathbb{P}(V^\alpha)$ et $H \in \prod_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Gr}_{\dim V^\alpha - 1}(V^\alpha)$. On dira par abus que la paire (x, H) est en *position générale*, lorsque pour tout $\alpha \in \Pi$, les sous-espaces vectoriels associés à x^α et H^α sont en somme directe, i.e.

$$x^\alpha \in \mathbb{P}(V^\alpha) \setminus H^\alpha.$$

Remarque 2.47. *(i) Les coordonnées de η_0 dans $\prod_{\alpha\in\Pi} \mathbb{P}(V^\alpha)$ sont*

$$y^\alpha(\eta_0) := V^\alpha_+.$$

(ii) Les coordonnées de $\check{\eta}_0$ *dans* $\prod_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Gr}_{\dim V^\alpha - 1}(V^\alpha)$ *sont*

$$Y^\alpha(\check{\eta}_0) := H_-^\alpha.$$

(iii) Pour tout $g \in G$ *et pour tout* $\alpha \in \Pi$*,*

$$(y^\alpha(g\eta_0), Y^\alpha(g\check{\eta}_0)) = \rho_\alpha(g)(y^\alpha(\eta_0), Y^\alpha(\check{\eta}_0)).$$

(iv) En particulier, pour tout élément loxodromique $g \in G$*, pour tout* $\alpha \in \Pi$*,*

$$(y^\alpha(g^+), Y^\alpha(g^-)) = (x_+(\rho_\alpha(g)), X_-(\rho_\alpha(g))).$$

Corollaire 2.48. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire. Alors l'application* $G-$*équivariante*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2)} &\longrightarrow \prod_{\alpha\in\Pi} \mathbb{P}(V^\alpha) \times \mathrm{Gr}_{\dim V^\alpha - 1}(V^\alpha) \\ (\eta, \xi) &\longmapsto (y^\alpha(\eta), Y^\alpha(\xi))_{\alpha\in Pi} \end{aligned}$$

est un plongement de l'ensemble des paires de points transverses vers un produit de sous-espaces projectifs. De plus, ce plongement est à valeurs dans l'ensemble des paires en position générale de $\prod_{\alpha\in\Pi} \mathbb{P}(V^\alpha) \times \prod_{\alpha\in\Pi} \mathrm{Gr}_{\dim V^\alpha - 1}(V^\alpha)$.

Exemple Dans le cas $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, pour le choix de la chambre de Weyl du tableau du paragraphe 2.2.4, les racines simples sont $(a_i - a_{i+1})_{i=1\ldots n-1}$ et la famille d'espaces vectoriels associée est $(\wedge_i \mathbb{R}^n)_{1\leq i\leq n-1}$. La représentation associée à la racine simple $a_i - a_{i+1}$ est $\rho_i(g) : u_1 \wedge \ldots \wedge u_i \mapsto (gu_1) \wedge \ldots \wedge (gu_i)$. De plus $\mathrm{d}\chi^i_{max}(\lambda(g)) = \lambda_1(g) + \ldots + \lambda_i(g)$.

Voici maintenant une interprétation des projections de Cartan et Jordan, du cocycle d'Iwasawa, grâce aux représentations proximales du Lemme 2.46. Ce Lemme est admis, on trouvera une preuve dans [BQ16b, Lemme 5.33].

Lemme 2.49 (Lemme 5.33 [BQ16b])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire. Soit une racine simple* $\alpha \in \Pi$ *et considérons la représentation irréductible proximale* (V^α, ρ_α) *de G donnée par le Lemme 2.46. Alors*

(a) il existe une norme euclidienne invariante par $\rho_\alpha(K)$ *sur* V^α *telle que pour tout* $a \in A$*, l'endomorphisme* $\rho_\alpha(a)$ *est symétrique,*

(b) pour une telle norme et sa norme d'opérateur induite sur $\mathrm{End}(V^\alpha)$*, pour tout* $g \in G$*,* $\eta \in \mathcal{F}$ *et* $v_\eta \in y^\alpha(\eta)$*,*

  (i) $\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(\kappa(g)) = \log(\|\rho_\alpha(g)\|)$,

  (ii) $\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(\lambda(g)) = \log(\lambda_1(\rho_\alpha(g)))$,

  (iii) $\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(\sigma(g, \eta)) = \log \frac{\|\rho_\alpha(g) v_\eta\|}{\|v_\eta\|}$.

D'après le Lemme 2.46, $(\mathrm{d}\chi^\alpha_{max})_{\alpha\in\Pi}$ est une base de $\mathfrak{a}^*$. Comme $\mathfrak{a}$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Fixons une norme euclidienne $\|\|$ sur $\mathfrak{a}$, notons $c_\Pi, C_\Pi > 0$ les constantes telles que pour tout $v \in \mathfrak{a}$,

$$c_\Pi \|v\| \leq \sup_{\alpha\in\Pi} \left|\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(v)\right| \leq C_\Pi \|v\|.$$

Remarque 2.50. *Pour tout $g \in G$, d'après le point (iii) du Lemme précédent*

$$\sup_{\xi \in \mathcal{F}} \|\sigma(g, \xi)\| \leq \frac{C_\Pi}{c_\Pi} \|\kappa(g)\|.$$

Lemme 2.51. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire.*

Alors il existe une fonction continue $h \in G \mapsto C_h \in \mathbb{R}_+$, invariante à gauche et à droite par l'action de K telle que

(i) pour tout $g, h \in G$, les projections de Cartan de gh et hg vérifient

$$\kappa(gh), \kappa(hg) \in \kappa(g) + \overline{B_{\mathfrak{a}}(0, C_h)},$$

(ii) pour tout $\eta \in \mathcal{F}$ et pour tout $h \in G$, le cocycle d'Iwasawa vérifie

$$\sigma(h, \eta) \in \overline{B_{\mathfrak{a}}(0, C_h)}.$$

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \Pi$, on considère la représentation irréductible et proximale (ρ_α, V^α) de G donnée par le Lemme 2.46. On munit cette représentation de la norme invariante par K donnée par le Lemme 2.49.

Pour tous $g, h \in G$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\|\rho_\alpha(g)\|}{\|\rho_\alpha(h^{-1})\|} &\leq \|\rho_\alpha(gh)\| \leq \|\rho_\alpha(g)\| \|\rho_\alpha(h)\|, \\ \frac{1}{\|\rho_\alpha(h^{-1})\|} &\leq \frac{\|\rho_\alpha(gh)\|}{\|\rho_\alpha(g)\|} \leq \|\rho_\alpha(h)\|. \end{aligned}$$

On obtient les mêmes inégalités pour hg.

D'après le Lemme 2.49, en passant au logarithme, on déduit

$$-\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}\big(\kappa(h^{-1})\big) \leq \mathrm{d}\chi^\alpha_{max}\big(\kappa(gh) - \kappa(g)\big) \leq \mathrm{d}\chi^\alpha_{max}\big(\kappa(h)\big). \tag{2.1}$$

Pour tout $\alpha \in \Pi$, posons $h_\alpha := \max\Big(\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}\big(\kappa(h)\big), \mathrm{d}\chi^\alpha_{max}\big(\kappa(h^{-1})\big)\Big)$. Alors, d'après le Lemme 2.46, la famille des différentielles en l'identité des poids $(\mathrm{d}\chi^\alpha_{max})_{\alpha \in \Pi}$ est une base duale de $\mathfrak{a}^*$. On considère sa base antéduale dans $\mathfrak{a}$. Le pavé $\prod_{\alpha \in \Pi}[-h_\alpha, h_\alpha]$ dans cette base est un compact. Considérons la plus petite boule fermée le contenant, $\overline{B_{\mathfrak{a}}(0, C_h)}$, où $C_h > 0$. On en déduit que le compact $\overline{B_{\mathfrak{a}}(0, C_h)}$ contient $\kappa(gh) - \kappa(g)$ ainsi que $\kappa(hg) - \kappa(g)$.

Rappelons que la projection de Cartan et l'application $h \mapsto \kappa(h^{-1})$ sont toutes deux continues et invariantes par K. En prenant le sup dans chaque coordonnée, on déduit que l'application $h \mapsto (h_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ est continue et invariante par K. Enfin, par définition de C_h, on en déduit que la fonction $h \mapsto C_h$ est continue et invariante par K.

Le point (ii) est une conséquence directe des points (i) et (iii) du Lemme 2.49 et de l'inégalité

$$\frac{1}{\|\rho_\alpha(h^{-1})\|} \leq \frac{\|\rho_\alpha(h)(v_\eta)\|}{\|v_\eta\|} \leq \|\rho_\alpha(h)\| \tag{2.2}$$

où $\eta \in \mathcal{F}$ et $v_\eta \in V^\alpha$ est un représentant unitaire. □

Lemme 2.52 (Lemme 4.6 [Ben97b])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire. Soit $F \subset G$ une partie bornée, alors il existe un compact $\mathfrak{C}_F \subset \mathfrak{a}$ tel que pour tout $g \in G$,*

$$\kappa(FgF) - \kappa(g) \subset \mathfrak{C}_F.$$

Démonstration. Comme F est bornée, il existe une partie compacte F' de G telle que $F \subset F'$.

Considérons l'application continue $h \mapsto C_h$ donnée par le Lemme 2.51 précédent. Puisque F' est compact, alors $\sup_{h \in F'} C_h \in \mathbb{R}_+$ est bien définie. Posons

$$\mathfrak{C}_F := \overline{B_{\mathfrak{a}}(0, 2 \sup_{h \in F'} C_h)}.$$

Alors $\mathfrak{C}_F$ est bien compacte et d'après le Lemme 2.51, pour tout $g \in G$,

$$\kappa(FgF) - \kappa(g) \subset \mathfrak{C}_F.$$

□

2.3.3 Produits d'éléments loxodromiques

On rappelle que $g \in G$ est loxodromique lorsque $\lambda(g) \in \mathfrak{a}^{++}$. Rappelons le Lemme suivant.

Lemme 2.53 (Lemme 5.37 [BQ16b])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire et soit $g \in G$. Considérons la famille de représentations irréductibles proximales $(V^\alpha, \rho_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ de G donnée par le Lemme 2.46.*

Alors g est loxodromique si et seulement si pour tout $\alpha \in \Pi$, l'endomorphisme $\rho_\alpha(g) \in \mathrm{GL}(V^\alpha)$ est proximal.

Propriétés de contraction Soit $g \in G$ un élément loxodromique. On rappelle qu'il existe $(h_g, m_g) \in G \times M$ tel que

$$g = h_g m_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1}.$$

Posons $g^+ := h_g \eta_0$ et $g^- := h_g \check{\eta}_0$. Rappelons que l'ensemble des points de $\mathcal{F}$ en position générale avec g^- est alors $h_g N^- \eta_0$. Notons $\mathcal{X}(g^-) \subset \mathcal{F}$ l'ensemble des points non transverses à g^-.

Fait 2.54. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire et soit $g \in G$. Alors pour tout $g \in G$ loxodromique, $\sigma(g, g^+) = \lambda(g)$.*

Preuve . Cela découle du Lemme 2.49, point (iii), pour tout $g \in G$, $\eta \in \mathcal{F}$ et $v_\eta \in y_\alpha(\eta)$ et toute représentation irréductible et proximale (ρ_α, V^α) du Lemme 2.46, alors

$$\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(\sigma(g, \eta)) = \log \frac{\|\rho_\alpha(g) v_\eta\|}{\|v_\eta\|}.$$

Soit $g \in G$ loxodromique, considérons $h_g \in G$ diagonalisant la partie hyperbolique de g. Rappelons que V^α_+ désigne la droite propre de poids maximale et que $\rho_\alpha(h_g) V^\alpha_+$ est alors le sous-espace propre associé à la valeur propre Λ_1 de $\rho_\alpha(g)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(\sigma(g, h_g \eta_0)) &= \log \frac{\|\rho_\alpha(g)\rho_\alpha(h_g) v_{\rho_\alpha}\|}{\|\rho_\alpha(h_g) v_{\rho_\alpha}\|} \\ &= \log(\lambda_1(\rho_\alpha(g))) \\ &= \mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(\lambda(g))\end{aligned}$$

Or $\left(\mathrm{d}\chi^\alpha_{max}\right)_{\alpha \in \Pi}$ étant une base de $\mathfrak{a}^*$, on en déduit que

$$\sigma(g, g^+) = \lambda(g).$$

□

Lemme 2.55. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $g \in G$ un élément loxodromique, soit $h_g \in G$ un élément diagonalisant la partie hyperbolique de g et $m_g \in M$ tel que $h_g m_g h_g^{-1}$ est sa partie elliptique, i.e.*

$$g = h_g m_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1}.$$

Alors pour tout $\eta \in h_g N^- \eta_0 = \mathcal{F} \setminus \mathcal{X}(g^-)$

$$\lim_{n+\infty} g^n \eta = g^+.$$

Preuve : Soit $\eta \in h_g N^- \eta_0$. Il existe donc $u_- \in N^-$ tel que $h_g^{-1}\eta = u_- \eta_0$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} g^n \eta &= h_g m_g^n e^{n\lambda(g)} \big(h_g^{-1}\eta\big) \\ &= h_g m_g^n e^{n\lambda(g)} u_- \eta_0 \\ &= h_g m_g^n \big(e^{n\lambda(g)} u_- e^{-n\lambda(g)}\big) \eta_0. \end{aligned}$$

Or d'après la Proposition 2.17,

$$\big(e^{n\lambda(g)} u_- e^{-n\lambda(g)}\big) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} e_G.$$

D'où

$$g^n \eta \underset{n+\infty}{\longrightarrow} h_g \eta_0 = g^+.$$

Remarquons maintenant que l'ouvert $\mathcal{F} \setminus \mathcal{X}(g^-)$ est stable par l'action de g. Donc son complémentaire, le fermé $\mathcal{X}(g^-) = h_g(\mathcal{F} \setminus N^- \eta_0)$ est invariant par l'action de g. $\square$

Définition 2.56. *Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g \in G$ un élément loxodromique. On dit qu'il est* $(r, \varepsilon)-$loxodromique *si pour tout $\alpha \in \Pi$, l'endomorphisme $\rho_\alpha(g)$ est $(r, \varepsilon)-$proximal.*

Un sous-semigroupe $\Gamma \subset G$ est fortement $(r, \varepsilon)-$Schottky *si pour tout $\alpha \in \Pi$, le sous-semigroupe $\rho_\alpha(\Gamma)$ est fortement $(r, \varepsilon)-$Schottky.*

Grâce à l'application $y : \mathcal{F} \to \prod_{\alpha \in \Pi} \mathbb{P}(V_\alpha)$ définie au Lemme 2.46, on munit $\mathcal{F}$ de la distance suivante, notée par abus d

$$\mathrm{d}(\xi, \eta) = \inf_{\alpha \in \Pi} \mathrm{d}(y^\alpha(\xi), y^\alpha(\eta)).$$

La Définition 2.56 et le fait d'utiliser la distance définie ainsi permettent de retrouver tous les énoncés du paragraphe 2.3.1 sur les éléments proximaux. Dans ce cadre, pour faciliter leur utilisation ultérieure, nous les rappelons en détail.

Proposition 2.57. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g \in G$ un élément loxodromique.*

Alors g est $(r, \varepsilon)-$loxodromique si et seulement si

(i) $\mathrm{d}(g^+, \mathcal{X}(g^-)) \geq 2r$,

(ii) $g\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))^\complement \subset B(g^+, \varepsilon)$,

(iii) la restriction de g à $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))^\complement$ est $\varepsilon-$ lipschitzienne.

Preuve : Utilisons la correspondance de Tits du Lemme 2.46, on en déduit

$$y(g^+) = \big(x_+(\rho_\alpha(g))\big)_{\alpha\in\Pi}.$$

Pour tout $\alpha \in \Pi$, le sous-ensemble $\mathcal{F} \setminus \mathcal{X}(g^-)$ est envoyé sur le bassin d'attraction de l'endomorphisme proximal $\rho_\alpha(g)$. Autrement dit

$$y(\mathcal{F} \setminus \mathcal{X}(g^-)) = \big(X_-(\rho_\alpha(g))^{\complement}\big)_{\alpha\in\Pi}.$$

De plus, pour tout $\delta > 0$, grâce au choix de la distance sur $\mathcal{F}$,

$$y(\mathcal{V}_\delta(\mathcal{X}(g^-))^{\complement}) = \big(\mathcal{V}_\delta(X_-(\rho_\alpha(g)))^{\complement}\big)_{\alpha\in\Pi}.$$

□

Remarquons :

(i) les normes euclidiennes sur les représentations $(V_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ dépendent du choix du sous-groupe compact maximal K de G. En particulier, la distance induite sur $\mathcal{F}$ dépend du choix de K.

(ii) de même que pour les éléments proximaux, il existe des éléments loxodromiques qui ne sont $(r,\varepsilon)-$loxodromiques pour aucun r ni ε.

(iii) si un élément est $(r,\varepsilon)-$loxodromique, alors pour tout $r' \in [\varepsilon, r]$ et $\varepsilon' \in [\varepsilon, r']$, il est $(r', \varepsilon')-$loxodromique.

(iv) si g est $(r,\varepsilon)-$loxodromique, alors pour tout $n \geq 1$, l'élément g^n est $(r,\varepsilon)-$loxodromique.

Lemme 2.58 (cf. Lemme 2.36)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $g \in G$ un élément loxodromique. Posons $r_0 := \frac{1}{2}\mathrm{d}(g^+, \mathcal{X}(g^-))$.*

Alors pour tout $r \in]0, r_0]$, pour tout $\varepsilon \in]0, r]$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, l'élément g^n soit $(r,\varepsilon)-$loxodromique.

Lemme 2.59 (cf. Lemme 2.38)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g \in G$. On suppose qu'il existe $(\eta, \xi) \in \mathcal{F}^{(2)}$ tels que*

(i) $\mathrm{d}(\eta, \mathcal{X}(\xi)) \geq 6r$,

(ii) $g\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(\xi))^{\complement} \subset B(\eta, \varepsilon)$,

(iii) la restriction $g_{|\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(\xi))^{\complement}}$ est $\varepsilon-$lipschitzienne.

Alors g est $(2r, 2\varepsilon)-$loxodromique avec $g^+ \in B(\eta, \varepsilon)$ et $\mathcal{X}(g^-) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(\xi))$.

Corollaire 2.60 (cf. Corollaire 2.39)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soient $0 < \varepsilon \leq r$ et $g \in G$ un élément $(r, \varepsilon/2)-$loxodromique tel que $\mathrm{d}(g^+, \mathcal{X}(g^-)) \geq 7r$.*

Alors pour tout $h \in G$ tel que $h \in B(e_G, \varepsilon/2)$, le produit gh est $(2r, 2\varepsilon)-$loxodromique, avec $(gh)^+ \in B(g^+, \varepsilon)$ et $\mathcal{X}\big((gh)^-\big) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))$.

Lemme 2.61 (cf. Lemme 2.43)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $0 < \varepsilon \leq r$, alors il existe un compact $\mathfrak{D}_{r,\varepsilon} \subset \mathfrak{a}$ tel que pour tout élément $(r,\varepsilon)-$loxodromique g,*

$$\kappa(g) - \lambda(g) \in \mathfrak{D}_{r,\varepsilon}.$$

Preuve : Soit $g \in G^{lox}$ un élément $(r,\varepsilon)-$loxodromique. D'après le Lemme 2.43, pour tout $\alpha \in \Pi$, comme $\rho_\alpha(g)$ est $(r,\varepsilon)-$proximal,

$$\log \frac{\|\rho_\alpha(g)\|}{\lambda_1(\rho_\alpha(g))} \leq |\log(2r)| + \Big(1 + \frac{1}{2r}\Big) e^{C_{r,\varepsilon}} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Posons

$$D_{r,\varepsilon} := |\log(2r)| + \Big(1 + \frac{1}{2r}\Big) e^{C_{r,\varepsilon}} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

D'ailleurs, comme $\|\rho_\alpha(g)\| \geq \lambda_1(\rho_\alpha(g))$, on en déduit

$$0 \leq \log \frac{\|\rho_\alpha(g)\|}{\lambda_1(\rho_\alpha(g))} \leq D_{r,\varepsilon}.$$

Enfin, d'après le Lemme 2.49 (i) et (ii), on en déduit

$$0 \leq \mathrm{d}\chi^\alpha_{max}(\kappa(g) - \lambda(g)) \leq D_{r,\varepsilon}.$$

Comme $(\mathrm{d}\chi^\alpha_{max})_{\alpha\in\Pi}$ est une base de $\mathfrak{a}^*$, d'après le Lemme 2.46, alors dans la base antéduale, le pavé $\prod_{\alpha\in\Pi} [0, D_{r,\varepsilon}]$ est un compact de $\mathfrak{a}$. Notons ce compact $\mathfrak{D}_{r,\varepsilon}$. On obtient bien le résultat voulu,

$$\kappa(g) - \lambda(g) \in \mathfrak{D}_{r,\varepsilon}.$$

□

Projection de Jordan d'un produit d'éléments loxodromiques Rappelons (cf Définition 2.23) que pour tout $\check{\eta} \in \mathcal{F}$, l'ensemble des points non transverses à $\check{\eta}$ est noté $\mathcal{X}(\check{\eta})$. De plus, si $\check{k}_{\check{\eta}} \in K$ est tel que $\check{k}_{\check{\eta}}\check{\eta}_0 = \check{\eta}$, alors l'ensemble des points transverses à $\check{\eta}$ s'écrit

$$\mathcal{F} \setminus \mathcal{X}(\check{\eta}) = \check{k}_{\check{\eta}} N^- \eta_0.$$

Définition 2.62 (cf. Définition 2.41)**.** *Soit $\check{\eta} \subset \mathcal{F}$. Pour tous $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{X}(\check{\eta})$, on note $\nu(\check{\eta}; \xi_1, \xi_2)$ le point de $\mathfrak{a}$ dont les coordonnées dans la base duale de $(\mathrm{d}\chi^\alpha_{max})_{\alpha\in\Pi}$ sont*

$$\nu(\check{\eta}; \xi_1, \xi_2) := \Big(\nu_1\big(Y^\alpha(\check{\eta}); y^\alpha(\xi_1), y^\alpha(\xi_2)\big)\Big)_{\alpha\in\Pi}.$$

Soit $r > 0$ et $\varepsilon \in]0, r]$, on définit

$$C_{r,\varepsilon} := \sup_{\check{\eta}\in\mathcal{F}} \sup\{\|\nu(\check{\eta}; \xi_1, \xi_2)\| \mid \mathrm{d}(\xi_1, \mathcal{X}(\check{\eta})) \geq 2r \text{ et } \xi_2 \in B(\xi_1, \varepsilon)\}.$$

Pour tout élément $g \in G^{lox}$ loxodromique, pour tout $\xi \in \mathcal{X}(g^-)^{\complement}$, On note

$$\nu(g, \xi) := \nu(g^-; g^+, \xi).$$

Fait 2.63. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Alors la fonction ν est continue sur son ensemble de définition. De plus, pour tout $\check{\eta} \subset \mathcal{F}$ et tous $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{X}(\check{\eta})^{\complement}$,*

$$\nu(\check{\eta}; \xi_1, \xi_3) = \nu(\check{\eta}; \xi_1, \xi_2) + \nu(\check{\eta}; \xi_2, \xi_3).$$

Lemme 2.64 (cf. Lemme 2.40)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $g \in G$ un élément loxodromique. Alors pour tout point $\xi \in \mathcal{X}(g^-)^{\complement}$, la suite $\Big(\sigma(g^n, \xi) - n\lambda(g)\Big)_{n\geq 1}$ converge vers $\nu(g, \xi)$.*

Lemme 2.65 (cf. Lemme 2.42)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} C_{r,\varepsilon} = 0$,

(ii) pour tout élément $(r, \varepsilon)-$loxodromique $g \in G$, pour tout $\eta \in \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))^{\complement}$ et pour tout entier $n \geq 1$

$$\left\| \sigma(g^n, \eta) - n\lambda(g) - \nu(g, \eta) \right\| \leq C_{r,\varepsilon}.$$

(iii) pour tout élément $(r, \varepsilon)-$loxodromique $g \in G$, pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(g^-))^{\complement}$ et pour tout $\xi' \in B(\xi, \varepsilon)$

$$\|\nu(g, \xi) - \nu(g, \xi')\| \leq C_{r,\varepsilon}.$$

Enfin, on retrouve la propriété suivante.

Proposition 2.66 (Lemme 3.4 [Ben00], cf. Proposition 2.44)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soient $l \geq 1$ un entier et $g_1, .., g_l \in G^{lox}$ une suite d'éléments $(r, \varepsilon)-$loxodromiques tels que $\mathrm{d}(g_{i-1}^+, \mathcal{X}(g_i^-)) \geq 6r$ pour tout $i = 1, ..., l$, avec $g_0 = g_l$. Notons $\nu := \nu(g_l, g_{l-1}^+) + ... + \nu(g_1, g_0^+)$.*

Alors pour tout $(n_i)_{1 \leq i \leq l} \in (\mathbb{N}^*)^l$,

$$\left\| \lambda(g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}) - \sum_{1 \leq i \leq l} n_i \lambda(g_i) - \nu \right\| \leq 2lC_{r,\varepsilon}.$$

De plus, l'élément $w := g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)-$loxodromique avec $w^+ \in B(g_l^+, \varepsilon)$ et $\mathcal{X}(w^-) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_1^-))$.

Chapitre 3

Un résultat de marche aléatoire

Dans ce chapitre, on étudie le comportement asymptotique en décomposition de Cartan de produits de matrices aléatoires, ainsi que le comportement asymptotique de leur spectre.

Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire. Soit K un sous-groupe compact maximal de G et soit A un tore maximal déployé de sorte qu'on dispose d'une décomposition de Cartan $G = KAK$. On désigne par $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl positive de $\mathfrak{a}$, par $\lambda : G \to \mathfrak{a}^+$ la projection de Jordan, $\kappa : G \to \mathfrak{a}^+$ la projection de Cartan et $\sigma : G \times \mathcal{F} \to \mathfrak{a}$ le cocycle d'Iwasawa-Busemann.

Soit μ une mesure de probabilité sur le groupe de Lie G et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ. On s'intéresse aux produits de matrices aléatoires $X_n...X_1$ et $X_1...X_n$ et plus précisément au comportement asymptotique des projections de Cartan et de Jordan de ces produits. On dit qu'une mesure de probabilité μ sur G est de $p-$ième moment fini si $\int_G \|\kappa(g)\|^p d\mu(g) < +\infty$. Pour tout $p \in \mathbb{R}$, notons $\mathcal{M}_Z^p(\Gamma)$ l'espace des mesures de probabilité sur G de *$p-$ième moment fini* dont le support est dans Γ et engendre un sous-semigroupe Zariski dense dans G.

D'après le Théorème de Furstenberg-Kesten [FK60], alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$, presque sûrement, la suite $\frac{1}{n}\kappa(X_n...X_1)$ converge vers une limite indépendante de l'aléa. Sa limite, notée σ_μ, est appelée le vecteur de Lyapunov de μ. On se pose la question suivante : où peut-on trouver des vecteurs de Lyapunov ? Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR85], Goldsheid et Margulis [GM89] ont démontré que pour toute mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$, alors $\sigma_\mu \in \mathfrak{a}^{++}$.

Dans [Ben97b], Y. Benoist introduit l'ensemble suivant.

Définition 3.1. *Soit* Γ *un sous-semigroupe de* G*. On définit le* cône limite de Benoist *par*

$$\mathcal{C}(\Gamma) := \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{R}_+\lambda(g)}.$$

Le cône limite de Benoist est inclus dans la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$, par définition de la projection de Jordan.

Théorème 3.2 (Théorème 1.3 [Ben97b])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors le cône limite de Benoist est convexe, d'intérieur non vide. De plus*

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \|\kappa(\gamma)\|\geq n}} \mathbb{R}_+\kappa(\gamma)}.$$

Il est assez aisé de prouver que pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$, alors $\sigma_\mu \in \mathcal{C}(\Gamma)$ (cf. Corollaire 3.13). Le résultat suivant, prouvé par Ç. Sert dans sa thèse [Ser16] et dont on trouvera une version dans [BS18] est plus précis et délicat à démontrer.

Théorème 3.3 (Proposition 5.5 [BS18]). *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors pour tout $\mu \in \mathcal{M}_Z^2(\Gamma)$,*

$$\sigma_\mu \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Dans le paragraphe 3.2, j'introduis un sous-ensemble noté $\mathcal{MD}_Z(\Gamma)$ de mesures satisfaisant une certaine hypothèse de déviation. Cet ensemble satisfait

$$\mathcal{M}_Z^2(\Gamma) \subset \mathcal{MD}_Z(\Gamma) \subset \mathcal{M}_Z^1(\Gamma).$$

J'affaiblis alors l'hypothèse du Théorème 3.3 en démontrant la même conclusion pour toute mesure de $\mathcal{MD}_Z(\Gamma)$.

Théorème 3.4. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors pour tout $\mu \in \mathcal{MD}_Z(\Gamma)$,*

$$\sigma_\mu \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Notons $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur G de support *fini* dans Γ et dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense dans G. En particulier, $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) \subset \mathcal{M}_Z^2(\Gamma)$ et donc pour tout mesure $\mu \in \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$, alors $\sigma_\mu \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$. Le théorème suivant démontre l'optimalité de la localisation des vecteurs de Lyapunov dans l'intérieur du cône limite.

Théorème 3.5. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors*

A. L'application (continue)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\sigma : \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{P}\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \mathbb{R}\sigma_\mu \end{aligned}$$

est surjective.

B. Si de plus Γ contient e_G, (par exemple lorsque Γ est un sous-groupe de G) alors l'application (continue)

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) &\longrightarrow \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \sigma_\mu \end{aligned}$$

est surjective.

Puisque $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) \subset \mathcal{MD}_Z(\Gamma)$, on en déduit.

Théorème 3.6. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire connexe de type non-compact et soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G. Alors l'application (continue)*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{MD}_Z(\Gamma) &\longrightarrow \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \sigma_\mu \end{aligned}$$

est surjective.

Donnons le plan de ce chapitre. Dans le premier paragraphe on rappelle une preuve de la continuité de l'application $\mu \mapsto \sigma_\mu$ sur $\mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$.

Dans le second paragraphe, on prouve le Théorème 3.4 en s'inspirant de la preuve de Ç. Sert du Théorème 3.3.

Dans le paragraphe 3.3, on rappelle dans un premier temps une Proposition [Ben97b] fondamentale permettant de réaliser tout sous-cône convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathcal{C}(\Gamma)$ comme le cône limite d'un sous-(semi)groupe de Γ. Cela permet d'en déduire la densité projective des vecteurs de Lyapunov pour les mesures $\mathcal{MD}_Z(\Gamma)$ dans l'intérieur du cône limite. Mais démontrer que l'application (continue)

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{MD}_Z(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{P}\mathring{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \mathbb{R}\sigma_\mu \end{aligned}$$

est d'image dense ne suffit pas pour obtenir la surjectivité. Pour ce faire, on démontre un Lemme 3.21 d'estimation du vecteur de Lyapunov pour des mesures à support fini dans un sous-semigroupe $(r, \varepsilon)-$Schottky et dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense dans G.

Enfin, dans le paragraphe 3.4, on démontre le Théorème 3.5.

Dans le dernier paragraphe, j'expose les résultats de E. Breuillard et Ç. Sert [BS18]. J'explique où la stratégie "topologique" que j'ai utilisée apparaît dans leur travail.

3.1 Le vecteur de Lyapunov

Dans ce paragraphe, on discute plusieurs hypothèses de finitudes de moments. On rappelle quelques résultats sur les mesures stationnaires sur le bord de Furstenberg $\mathcal{F} = G/MAN$. Puis on définit le vecteur de Lyapunov en moyennant le cocycle d'Iwasawa sur $G \times \mathcal{F}$. Cela permettra de retrouver par un argument classique la continuité du vecteur de Lyapunov par rapport aux mesures étudiées.

3.1.1 Mesures et moments

Commençons par rappeler les propriétés qui vont être vérifiées par les mesures qu'on considère.

Définition 3.7. *Soit $p \in \mathbb{R}^+$. Une mesure de probabilité μ à support dans G est a un $p-$*ième moment fini *si*

$$\int_G \|\kappa(g)\|^p \mathrm{d}\mu(g) < +\infty.$$

On dit que μ admet un moment exponentiel fini *s'il existe un réel strictement positif $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_G e^{\alpha\|\kappa(g)\|} \mathrm{d}\mu(g) < +\infty.$$

Remarque 3.8. *Les mesures à support fini ont un moment exponentiel fini et ont pour tout $p \geq 0$ un $p-$ième moment fini.*

Rappelons que dans l'étude des sommes de variables aléatoires i.i.d à valeurs réelles, si la loi commune des variables aléatoires admet un premier moment fini, alors la somme vérifie une loi des grands nombres. Si la loi commune des variables aléatoires admet un second moment fini, alors la somme vérifie un théorème central limite. Furstenberg-Kesten [FK60] et Benoist-Quint [BQ16a] ont prouvé l'analogue de ces théorèmes limites dans G, où la projection de Cartan d'un produit de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans G joue le même rôle que la somme de variables aléatoires i.i.d. à valeurs réelles.

Introduisons des ensembles de mesures.

Définition 3.9. *Soit $p \geq 0$. On note $\mathcal{M}_Z^p(\Gamma)$ l'espace des mesures de probabilité μ telles que*

(i) μ est de $p-$ième moment fini,

(ii) le support de μ est dans Γ,

(iii) le support de μ engendre un sous-semi groupe Zariski dense de G.

L'espace des mesures de probabilité vérifiant seulement les points (i) et (ii) est noté $\mathcal{M}^p(\Gamma)$.

Ce sont des espaces de mesures de probabilité, donc pour tout sous-semigroupe Γ Zariski dense dans G et $p \geq q$,

$$\mathcal{M}_Z^p(\Gamma) \subset \mathcal{M}_Z^q(\Gamma).$$

Soit X un espace topologique localement compact sur lequel G agit continuement. L'espace des mesures boréliennes de probabilité de X est alors naturellement munie d'une action (continue) de G, définie pour tout $g \in G$ et toute mesure de probabilité m par

$$g_* m(A) := m(g^{-1}A),$$

pour tout borélien $A \subset X$. Pour définir le vecteur de Lyapunov, on aura besoin de la notion de convolution de mesure, ce qui nous permettra d'introduire les mesures stationnaires des marches aléatoires.

Définition 3.10. *Soit m une mesure de probabilité sur X et μ une mesure de probabilité sur G. Le produit de convolution de m par la mesure de probabilité μ est défini par la relation*

$$\mu * m := \int_G g_* m \mathrm{d}\mu(g).$$

On dit que m est $\mu-$stationnaire si $\mu * m = m$ i.e. pour toute fonction à support compact $f \in \mathcal{C}_c(X)$, alors

$$\int_G \int_X f(g.x) \mathrm{d}m(x) \mathrm{d}\mu(g) = \int_X f(x) \mathrm{d}m(x).$$

Notons $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ l'espace des mesures (boréliennes) de probabilité sur $\mathcal{F} = G/MAN$. Par compacité de $\mathcal{F}$, il est compact et muni d'une action de G. De plus, la convolution

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1(G) \times \mathcal{P}(\mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}) \\ (\mu, m) &\longmapsto \mu * m \end{aligned}$$

est continue pour la topologie faible étoile.

Guivarc'h et Raugi [GR85] et Goldsheid et Margulis [GM89] ont prouvé que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(G)$, il existe une unique mesure $\mu-$stationnaire sur $\mathcal{F}$. On note m_μ cette unique mesure μ-stationnaire sur $\mathcal{F}$.

Rappelons (Définition 2.25) que le cocycle d'Iwasawa-Busemann est l'application

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{F} &\longrightarrow \mathfrak{a} \\ (g, \eta) &\longmapsto \sigma(g, \eta) \end{aligned}$$

définie pour tout $g \in G$ et $\eta := k_\eta \eta_0 \in \mathcal{F}$, avec $k_\eta \in K$, par la relation

$$gk_\eta \in K\exp(\sigma(g,\eta))N.$$

D'après le Lemme 2.49, cette application (continue) vérifie l'inégalité

$$\sup_{\xi \in \mathcal{F}} \|\sigma(g,\xi)\| \leq \|\kappa(g)\|.$$

Donc pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$ et toute mesure de probabilité m sur $\mathcal{F}$, le cocycle d'Iwasawa est intégrable pour la mesure $\mu \otimes m$ i.e.

$$\int_{G\times\mathcal{F}} \|\sigma(g,\eta)\| \mathrm{d}\mu(g)\mathrm{d}m(\eta) < +\infty.$$

Définition 3.11. *Soit $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$, le* vecteur de Lyapunov *de μ est défini par*

$$\sigma_\mu := \int_{G\times\mathcal{F}} \sigma(g,\eta)\mathrm{d}\mu(g)\mathrm{d}\nu_\mu(\eta).$$

Le théorème suivant résulte des travaux de Furstenberg, Kesten [FK60]. C'est une loi des grands nombres sur G. On trouvera cet énoncé par exemple dans le livre de Y. Benoist et J-F. Quint [BQ16b, Théorème 9.9 (a)]. Notons $L^1(G^{\mathbb{N}^*}, \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}, \mathfrak{a})$ l'espace des fonctions intégrables de l'espace de Bernoulli $(G^{\mathbb{N}^*}, \mu^{\otimes\mathbb{N}^*})$ à valeurs dans $\mathfrak{a}$.

Théorème 3.12 ([FK60])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense dans G. Soit $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$. Alors pour $\mu^{\otimes\mathbb{N}^*}-$presque tout $b = (b_n)_{n\geq 1} \in G^{\mathbb{N}^*}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\kappa(b_n...b_1) = \sigma_\mu.$$

Cette convergence a aussi lieu dans $L^1(G^{\mathbb{N}^*}, \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}, \mathfrak{a})$.

3.1.2 Continuité du vecteur de Lyapunov par rapport à la mesure

Dans ce paragraphe, on démontre, grâce à la loi des grands nombres, que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$, alors $\sigma_\mu \in \mathcal{C}(\Gamma)$. On rappelle aussi une preuve de la continuité de $\mu \mapsto \sigma_\mu$ sur $\mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$. Le résultat est dû à Furstenberg et Kifer [FK83]. Pour cela, on admet le résultat dû à Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR85], Goldsheid et Margulis [GM89], que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$, la mesure $\mu-$stationnaire sur $\mathcal{F}$ est unique. On trouvera un énoncé de ce résultat d'unicité de la mesure stationnaire dans la Proposition 10.1 du livre [BQ16b].

Corollaire 3.13. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{M}_Z^1(\Gamma) &\longrightarrow \mathfrak{a}^+ \\ \mu &\longmapsto \sigma_\mu \end{aligned}$$

est continue et à valeurs dans $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Démonstration : Prouvons d'abord que $\sigma(\mathcal{M}_Z^1(\Gamma)) \subset \mathcal{C}(\Gamma)$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$. D'après la loi des grands nombres, on considère $(b_n)_{n\geq 1}$ un tirage typique d'éléments de Γ, alors

$$\lim_{n+\infty} \frac{1}{n}\kappa(b_n...b_1) = \sigma_\mu.$$

La caractérisation du cône limite de Benoist via les projections de Cartan (Théorème 3.2) donne $\sigma_\mu \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

Soit μ une mesure à support Zariski dense dans Γ, on veut démontrer que la fonction $\tau \mapsto \sigma_\tau$ est continue en μ. Soit une suite (μ_n) de mesures de probabilité sur Γ qui converge vers μ pour la topologie faible étoile. Pour tout $n \geq 1$, notons $m_n := m_{\mu_n}$ la mesure μ_n-stationnaire.

Rappelons que l'espace $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ est compact, par compacité de $\mathcal{F}$. Démontrons maintenant que toute valeur d'adhérence de la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ est une mesure $\mu-$stationnaire. Soit $(m_{n_k})_{k\geq 1}$ une sous-suite convergente (pour la topologie faible étoile) de la suite m_n. Notons $m \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ sa limite. D'une part, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1(G) \times \mathcal{P}(\mathcal{F}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}) \\ (\mu, m) &\longmapsto \mu * m \end{aligned}$$

est continue pour la topologie faible étoile. Donc la suite $(\mu_{n_k} * m_{n_k})_{k\geq 1}$ converge (pour la topologie faible étoile) vers $\mu * m$.

D'autre part, par définition de la mesure stationnaire, pour tout $k \geq 1$,

$$\mu_{n_k} * m_{n_k} = m_{n_k}.$$

Donc la suite $(m_{n_k})_{k\geq 1}$ converge (pour la topologie faible étoile) vers $\mu * m$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, on en déduit

$$m = \mu * m.$$

D'après [BQ16b, Proposition 10.1], la mesure $\mu-$stationnaire sur $\mathcal{F}$ est unique. On en déduit $m = m_\mu$.

On a démontré que m_μ est la seule valeur d'adhérence possible de la suite $(m_n)_{n\geq 1}$, ce qui suffit pour en déduire que la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ converge vers m_μ.

Ainsi, la suite $(\mu_n \otimes m_n)_{n\geq 1}$ converge (pour la topologie faible étoile) vers $\mu \otimes m_\mu$. Le cocycle d'Iwasawa $\sigma : G \times \mathcal{F} \to \mathfrak{a}$ est continu. D'après le Lemme 2.49, pour tout $g \in G$, le cocycle vérifie l'inégalité

$$\sup_{\xi \in \mathcal{F}} \|\sigma(g, \xi)\| \leq \|\kappa(g)\|.$$

Puisque $(\mu_n)_{n\geq 1}, \mu \subset \mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$, on déduit que le cocycle est intégrable pour les mesures $\mu_n \otimes m_n$ pour tout $n \geq 1$ et $\mu \otimes m_\mu$. Par convergence dominée, on en déduit

$$\int_{G\times\mathcal{F}} \sigma(g, \xi) \mathrm{d}\mu_n(g) \mathrm{d}\nu_{\mu_n}(\xi) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \int_{G\times\mathcal{F}} \sigma(g, \xi) \mathrm{d}\mu(g) \mathrm{d}\nu_\mu(\xi).$$

D'où $\lim_{n+\infty} \sigma_{\mu_n} = \sigma_\mu$. □

Si on fixe un ensemble fini $S \subset G$ engendrant un sous-semi-groupe Zariski dense de G et que l'on note $\mathrm{Conv}(\delta_S)$ l'ensemble des mesures à support dans S, Peres [Per92] a démontré l'analycité en les coefficients de la fonction $\mu \in \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\delta_S) \mapsto \sigma_\mu$. Notons que l'on ne dispose a priori pas de cette régularité aux bords.

3.2 Hypothèse de déviation et Théorème de localisation

Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire et soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense dans G. D'après le Théorème 3.3,

$$\sigma(\mathcal{M}^2_Z(\Gamma)) \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Or
$$\mathcal{M}_Z^2(\Gamma) \subsetneq \mathcal{M}_Z^1(\Gamma).$$
Dans ce paragraphe, on remplace l'hypothèse de second moment fini par une hypothèse de déviation. On définit ainsi un ensemble de mesures de probabilité, noté $\mathcal{MD}_Z(\Gamma)$, tel que
$$\mathcal{M}_Z^2(\Gamma) \subset \mathcal{MD}_Z(\Gamma) \subset \mathcal{M}_Z^1(\Gamma).$$
On prouve ensuite que
$$\sigma(\mathcal{MD}_Z(\Gamma)) \subset \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

3.2.1 Hypothèse de déviation

Hypothèse 3.14. *Soit μ une mesure de probabilité sur G de premier moment fini. On dit que μ satisfait l'hypothèse de* déviation *si la marche aléatoire en projection de Cartan associée à la mesure μ satisfait l'hypothèse de déviation suivante : il existe une fonction croissante $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ et un réel $R_\mu \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tels que*

(i) $\lim\limits_{n+\infty} \varphi(n) = +\infty$,

(ii) pour tout ouvert non vide $U \subset B(0, R_\mu)$, il existe $\varepsilon(U) > 0$ tel que
$$\limsup_{n+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{\kappa(X_1...X_n) - n\sigma_\mu}{\varphi(n)} \in U\Big) \geq \varepsilon(U) > 0.$$

Définissons maintenant un nouvel ensemble de mesures.

Définition 3.15. *Soit $\mathcal{MD}_Z(\Gamma)$ l'ensemble des mesures de probabilité μ telles que*

(i) μ a un premier moment fini,

(ii) le support de μ est dans Γ,

(iii) le support de μ engendre un sous-semigroupe Zariski dense de G.

(iv) μ satisfait l'hypothèse de déviation 3.14.

Remarquons que par définition $\mathcal{MD}_Z(\Gamma) \subset \mathcal{M}_Z^1(\Gamma)$.

Fait 3.16. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe de type non-compact et soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense dans G. Alors*
$$\mathcal{M}_Z^2(\Gamma) \subset \mathcal{MD}_Z(\Gamma).$$
Preuve : Notons $r_G := \dim \mathfrak{a}$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_Z^2(\Gamma)$. Il suffit de vérifier que μ satisfait l'hypothèse de déviation. On applique le Théorème central limite [BQ16a] à la mesure $\mu \in \mathcal{M}_Z^2(\Gamma)$. Il existe une norme euclidienne $\|\cdot\|_\mu$ sur $\mathfrak{a}$ telle que pour toute fonction continue bornée $\psi \in \mathcal{C}_b^0(\mathfrak{a})$,
$$\int_G \psi\Big(\frac{\kappa(g) - n\sigma_\mu}{\sqrt{n}}\Big) \mathrm{d}\mu^{*n}(g) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} (2\pi)^{-r_G/2} \int_{\mathfrak{a}} \psi(v) e^{-\frac{\|v\|_\mu}{2}} \mathrm{d}\pi_\mu(v),$$
où $\mathrm{d}\pi_\mu(v) = \mathrm{d}v_1...\mathrm{d}v_{r_G}$ est une mesure produit pour base orthonormée de la norme $\|\cdot\|_\mu$. On choisit alors comme fonction encodant la vitesse de déviation, la fonction racine $\varphi(x) = \sqrt{x}$ et $R_\mu = +\infty$. La mesure μ satisfait bien l'hypothèse de déviation pour ces choix de φ et R_μ.

D'où $\mathcal{M}_Z^2(\Gamma) \subset \mathcal{MD}_Z(\Gamma)$. □

Il serait intéressant de construire des mesures de probabilité de premier moment fini, dont le support dans Γ engendre un sous-semigroupe Zariski dense dans G, de second moment infini et satisfaisant l'hypothèse de déviation.

3.2.2 Preuve du Théorème de localisation

On prouve le Théorème 3.4, i.e que pour tout sous-semigroupe $\Gamma \subset G$, Zariski dense, alors

$$\sigma(\mathcal{MD}_Z(\Gamma)) \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Un des points clés de la preuve de ce Théorème est l'hypothèse de déviation des mesures de $\mathcal{MD}_Z(\Gamma)$. Le Théorème suivant, dû à Abels-Margulis-Soifer est aussi crucial dans cette preuve.

Théorème 3.17 ([AMS95]). *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors il existe un réel $r = r(\Gamma) > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, r]$, il existe un sous-ensemble fini $F \subset \Gamma$ tel que quel que soit $g \in G$, il existe $f \in F$ de sorte que gf est $(r, \varepsilon)-$loxodromique.*

Rappelons le Lemme 2.52 : pour tout partie bornée $F \subset G$, il existe un compact $\mathfrak{C}_F \subset \mathfrak{a}$ tel que pour tout $g \in G$,

$$\kappa(FgF) - \kappa(g) \subset \mathfrak{C}_F.$$

D'après le Lemme 2.61, pour tout $0 < \varepsilon \leq r$, il existe un compact $\mathfrak{D}_{r,\varepsilon} \subset \mathfrak{a}$ tel que pour tout élément $(r, \varepsilon)-$loxodromique $g \in G$,

$$\kappa(g) - \lambda(g) \in \mathfrak{D}_{r,\varepsilon}.$$

D'après le Lemme 2.64, pour tout élément loxodromique g et tout élément $\xi \in \mathcal{F}$ dans le bassin d'attraction de g^+, on a la convergence

$$\sigma(g^n, \xi) - \lambda(g^n) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} \nu(g, \xi) := \nu(g^-; g^+, \xi),$$

où la fonction ν est donnée dans la Définition 2.62.

Démonstration du Théorème 3.4 : Soit $\mu \in \mathcal{MD}_Z(\Gamma)$. On pose $r_G := \dim \mathfrak{a}$. On note Γ_μ le sous-semigroupe engendré par le support de la mesure μ. Par le Théorème 3.17, il existe $r > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, r]$, il existe une partie finie $F \subset \Gamma_\mu$ telle que pour tout $g \in G$, il existe $f \in F$ de sorte que gf soit $(r, \varepsilon)-$loxodromique. Fixons $\varepsilon \in]0, r]$ et considérons le compact $\mathfrak{D}_{r,\varepsilon} \subset \mathfrak{a}$ donné par le Lemme 2.61, ainsi que le compact $\mathfrak{C}_F \subset \mathfrak{a}$ donné par le Lemme 2.52.

Estimons d'abord la projection de Jordan d'éléments $(r, \varepsilon)-$loxodromiques de la forme $g_n f_n$ avec $g_n \in supp(\mu^{*n})$ et $f_n \in F$ choisis de sorte que $g_n f_n$ soit $(r, \varepsilon)-$loxodromique. D'après le Lemme 2.61,

$$\lambda(g_n f_n) - \kappa(g_n f_n) \in \mathfrak{D}_{r,\varepsilon}.$$

Mais comme les f_n sont pris dans l'ensemble fini F, par le Lemme 2.52,

$$\kappa(g_n f_n) - \kappa(g_n) \in C_F.$$

Remarquons que

$$\frac{\lambda(g_n f_n)}{n} - \sigma_\mu = \frac{\lambda(g_n f_n)}{n} - \frac{\kappa(g_n)}{n} + \frac{\kappa(g_n) - n\sigma_\mu}{n}.$$

Cela permet d'écrire, lorsque $n \to +\infty$, uniformément en les choix des (g_n),

$$\frac{\lambda(g_n f_n)}{n} - \sigma_\mu = \frac{\kappa(g_n) - n\sigma_\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Utilisons maintenant l'hypothèse de déviation sur μ. Il existe donc une fonction continue croissante $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{n+\infty} \varphi(n) = +\infty$ et $R_\mu > 0$ telle que pour tout borélien non vide $U \subset B(0, R_\mu)$, il existe $\varepsilon(U) > 0$ tel que

$$\limsup_{n+\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{\kappa(X_1...X_n) - n\sigma_\mu}{\varphi(n)} \in U\Big) \geq \varepsilon(U) > 0.$$

On choisit, pour tout $v \in B(0, R_\mu)\backslash\{0\}$ une suite $v_{n_k} \to v$ et une suite $g_{n_k} \in supp(\mu^{*n_k})$ de sorte à avoir des déviations de la forme

$$\frac{\kappa(g_{n_k}) - n_k\sigma_\mu}{n_k} = \frac{\varphi(n_k)}{n_k} v_{n_k}.$$

On en déduit que pour tout $v \in B(0, R_\mu) \setminus \{0\}$, il existe une suite $v_{n_k} \to v$, des suites $g_{n_k} \in supp(\mu^{*n_k})$ et $f_{n_k} \in F$, tel que $g_{n_k} f_{n_k}$ soit $(r, \varepsilon)-$loxodromique et qu'asymptotiquement,

$$\frac{\lambda(g_{n_k} f_{n_k})}{n_k} - \sigma_\mu = \frac{\varphi(n_k)}{n_k} v_{n_k} + O\Big(\frac{1}{n_k}\Big). \tag{3.1}$$

Finissons maintenant la preuve par l'absurde en utilisant le Corollaire 3.13 que $\sigma_\mu \in \mathcal{C}(\Gamma)$ et la convexité du cône limite.

Supposons que $\sigma_\mu \in \partial\mathcal{C}(\Gamma)$. Alors, par convexité de $\mathcal{C}(\Gamma)$, il existe une forme linéaire non nulle, $\psi \in \mathfrak{a}^*$ qui soit à valeurs négatives ou nulles sur $\mathcal{C}(\Gamma)$ et nulle en σ_μ. En fait, on choisit ψ tel que l'hyperplan $\ker(\psi)$ soit tangent au cône limite, de points de contact la demi-droite $\mathbb{R}_+\sigma_\mu$ i.e. $\sigma_\mu \in \ker(\psi)$. Évaluons ψ sur l'équation 3.1,

$$\psi\Big(\frac{\lambda(g_{n_k} f_{n_k})}{n_k}\Big) = \frac{\varphi(n_k)}{n_k} \psi(v_{n_k}) + O\Big(\frac{1}{n_k}\Big).$$

Or $\frac{\lambda(g_{n_k} f_{n_k})}{n_k} \in \mathcal{C}(\Gamma)$, donc pour tout $k \geq 1$,

$$\psi\Big(\frac{\lambda(g_{n_k} f_{n_k})}{n_k}\Big) \leq 0.$$

Mais lorsque $k \to +\infty$, le terme $\frac{\varphi(n_k)}{n_k}\psi(v_{n_k})$ devient dominant, il est donc négatif. On en déduit en passant à la limite que $\psi(v) \leq 0$. On vient de prouver que $\psi(v) \leq 0$ pour tout $v \in B(0, R_\mu)$. Mais c'est impossible puisque ψ est une forme linéaire non nulle. □

3.3 Une estimation fine du vecteur de Lyapunov

Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. D'après le Théorème 3.4,

$$\sigma(\mathcal{MD}_Z(\Gamma))) \subset \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Dans ce paragraphe, on commence par prouver que

$$\overline{\mathbb{P}(\sigma(\mathcal{MD}_Z(\Gamma)))} = \mathbb{P}\mathring{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Ensuite, on démontre le Lemme 3.21 d'estimation des vecteurs de Lyapunov des mesures de $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$, lorsque Γ est un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon)-$Schottky de G.

3.3.1 Densité projective des vecteurs de Lyapunov

Proposition 3.18 (Proposition 5.1 [Ben97b]). *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) Zariski dense de G et Ω un cône convexe fermé d'intérieur non vide dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ (resp. un cône convexe fermé d'intérieur non vide dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ et stable pas l'involution d'opposition). Alors il existe un sous-semigroupe (resp. sous-groupe) discret, Zariski dense Γ' de Γ tel que $\mathcal{C}(\Gamma') = \Omega$.*

Comme on se restreint au cadre des groupes de Lie semisimples réels linéaires, connexes de type non-compact, l'énoncé qu'on donne diffère légèrement de celui de l'article. Les explications qui suivent sont un peu techniques si on n'a pas l'énoncé originel de l'article d'Y. Benoist en tête. La formulation originelle concerne un cadre de groupes définis sur des corps plus généraux. Elle contient une hypothèse de plus, "Γ non borné modulo le centre de G", qui est vérifiée lorsque G est semisimple réel linéaire de type non-compact (on a alors G/Z non compact où Z est le centre de G) et dès que Γ contient un élément loxodromique. Or Y. Benoist et F. Labourie [BL93], Prasad [Pra94] ont prouvé que si G est un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact, alors tout sous-semigroupe Zariski dense de G contient des éléments loxodromiques (on pourra aussi consulter [BQ16b, Théorème 6.56] pour une preuve).

Il est ensuite assez aisé de remarquer la densité projective des vecteurs de Lyapunov dans le cône limite en utilisant le Corollaire 3.13.

Corollaire 3.19. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors l'application (continue)*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{MD}_Z(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{P}\mathring{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \mathbb{R}\sigma_\mu \end{aligned}$$

est d'image dense.

Preuve : Soit $\theta \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$. Pour tout voisinage compact convexe d'intérieur non vide $V \subset \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$ de θ, on note $C(V) := \sum_{v \in V} \mathbb{R}_+ v$ le plus petit sous-cône de $\mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$ contenant V. Comme V est compact d'intérieur non vide, le sous-cône $C(V)$ est convexe fermé d'intérieur non vide. D'après la Proposition 3.18, il existe un sous-semigroupe $\Gamma_V \subset \Gamma$, Zariski dense, dont le cône limite est exactement $C(V)$. D'après le Corollaire 3.13, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1(\Gamma_V) &\longrightarrow C(V) \\ \mu &\longmapsto \sigma_\mu, \end{aligned}$$

est continue. D'après le Théorème 3.4, la restriction de cette application à $\mathcal{MD}_Z(\Gamma) \subset \mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$ est encore continue, mais à valeurs dans l'intérieur de $C(V)$.

Ceci étant vrai pour des voisinages convexes arbitrairement petits V de θ, on a bien $\mathbb{R}\theta \in \overline{\mathbb{P}\sigma(\mathcal{MD}_Z(\Gamma))}$. □

La Proposition 3.18 ne suffit pas pour démontrer la surjectivité de l'application $\mu \mapsto \mathbb{R}\sigma_\mu$. Pour cela, on utilise une classe particulière de sous-semigroupes de Γ, les sous-semigroupes $(r, \varepsilon)-$Schottky (cf Définition 2.56) Grâce à la Proposition 2.66 et aux Lemmes 2.65, 2.61, on estime assez précisément les projections de Jordan et de Cartan des éléments de ces semigroupes.

3.3.2 Le lemme d'estimation

Le Lemme suivant permet d'estimer les projections de Cartan et Jordan des éléments d'un sous-semigroupe fortement $(r,\varepsilon)-$Schottky (Cf Définition 2.56). Soit $E=\{\gamma_j\}_{j\in J}$ un ensemble fini d'éléments de Γ et w un mot de longueur finie, non trivial en l'alphabet E. L'écriture $w=g_l^{n_l}...g_1^{n_1}$, où $l\geq 1$, est dite *très réduite* si

(i) $g_{i+1}\in E\setminus\{g_i,g_i^{-1}\}$ pour tout $1\leq i\leq l-1$,

(ii) $n_i\geq 1$ pour tout $1\leq i\leq l$.

L'entier l est la longueur de l'écriture réduite.

Lemme 3.20 (Lemme 4.1 et 4.4 [Ben97b]). *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe de type non-compact. Alors pour tout $r\geq\varepsilon>0$, il existe un compact $\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}\subset\mathfrak{a}$ tel que*

- *pour tout sous-semigroupe fortement (r,ε)-Schottky, dont on note $E=\{\gamma_j\}_{j\in J}$ un ensemble de générateurs,*

- *pour tout entier $l\geq 1$ et toute suite $g_l,...,g_1\in E$ vérifiant $g_{i+1}\in E\setminus\{g_i,g_i^{-1}\}$ pour tout $1\leq i\leq l-1$,*

- *pour toute famille d'entiers $(n_i)_{1\leq i\leq l}\subset(\mathbb{N}^*)^l$,*

alors

$$\lambda(g_l^{n_l}...g_1^{n_1})-\sum_{1\leq j\leq l}n_j\lambda(g_j)\in l\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}\quad\text{et}\quad\kappa(g_l^{n_l}...g_1^{n_1})-\sum_{1\leq j\leq l}n_j\lambda(g_j)\in(l+1)\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}.$$

Idéee de la preuve : En utilisant la Proposition 2.66, les Lemmes 2.65, 2.61, ainsi que la continuité de la fonction ν donnée dans la Définition 2.62, on déduit ce Lemme en posant $\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}:=B(0,N_{r,\varepsilon})$, où

$$N_{r,\varepsilon}:=2C_{r,\varepsilon}+D_{r,\varepsilon}+\sup_{\check{\eta}\in\mathcal{F}}\{\|\nu(\check{\eta};\xi_1,\xi_2)\|\ |\xi_1,\xi_2\in\mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\eta}))^{\complement}\}.$$

□

Le Lemme suivant permet d'estimer le vecteur de Lyapunov pour toute mesure à support fini dans un sous-semigroupe fortement $(r,\varepsilon)-$Schottky Zariski dense de G.

Lemme 3.21. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire connexe de type non-compact. On fixe $r\geq\varepsilon>0$ et on considère le compact $\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}\subset\mathfrak{a}$ donné dans l'énoncé du Lemme 3.20 précédent.*

Soit Γ un sous-semigroupe fortement (r,ε)-Schottky Zariski dense dans G. Considérons un sous-ensemble fini *$(\gamma_i)_{i\in I}\subset\Gamma$ qui engendre un sous-semigroupe Zariski dense de G. Notons δ_{γ_i} la mesure de Dirac en γ_i pour tout $i\in I$.*

Alors pour toute famille de réels strictement positifs $t=(t_i)_{i\in I}\in(\mathbb{R}_+^*)^I$ telle que $\sum_{i\in I}t_i=1$, tout réel $t_0\in[0,1[$, le vecteur de Lyapunov de la mesure de probabilité

$$\mu_t:=t_0\delta_{e_G}+(1-t_0)\sum_{i\in I}t_i\delta_{\gamma_i},$$

vérifie

$$\sigma_{\mu_t}-(1-t_0)\sum_{i\in I}t_i\lambda(\gamma_i)\in 2(1-t_0)\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}.$$

Démonstration : Supposons que $I \subset \mathbb{N}^*$. On fixe $t_0 \in [0,1[$ et une famille de réels strictement positifs $t = (t_i)_{i\in I}$ telle que $\sum\limits_{i\in I} t_i = 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi μ_t. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned}
A_N &= \sigma_{\mu_t} - \frac{1}{N}\kappa(X_N...X_1),\\
B_N &= \frac{1}{N}\kappa(X_N...X_1) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda(X_n),\\
C_N &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda(X_n) - (1-t_0)\sum_{i\in I} t_i\lambda(\gamma_i).
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sigma_{\mu_t} - (1-t_0)\sum_{i\in I} t_i\lambda(\gamma_i) = A_N + B_N + C_N.$$

On va contrôler séparément les termes A_N, B_N et C_N lorsque $N \to +\infty$.

Pour le terme A_N, on applique le Théorème 3.12 (loi des grands nombres) pour le cocycle d'Iwasawa-Buseman. Ainsi, $\mu_t^{\otimes\mathbb{N}^*}$-presque partout

$$\frac{1}{N}\kappa(X_N...X_1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sigma_{\mu_t}.$$

Il existe $\Omega_A \subset G^{\otimes\mathbb{N}^*}$ de $\mu_t^{\otimes\mathbb{N}^*}$-mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_A$, il existe un entier $N_\omega \geq 0$ tel que pour tout $N \geq N_\omega$,

$$A_N(\omega) \in \frac{1-t_0}{3}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Pour contrôler B_N, on va estimer la longueur d'une écriture très réduite du mot $X_N...X_1$. Pour tout $N \geq 1$, il existe un entier $1 \leq l(N) \leq N$, une famille $(g_j)_{1\leq j\leq l(N)} \subset S^{l(N)}$ et une famille d'entiers $(k_j)_{1\leq j\leq l(N)} \subset \mathbb{N}_+^*$ tels que $g_1^{k_1}...g_{l(N)}^{k_{l(N)}}$ soit une écriture très réduite de $X_N...X_1$. Ainsi,

$$\kappa(X_N...X_1) = \kappa\big(g_1^{k_1}...g_{l(N)}^{k_{l(N)}}\big).$$

Comme $\lambda(e_G) = 0$ et $\lambda(g_j^{k_j}) = k_j\ \lambda(g_j)$, on déduit

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda(X_n) = \sum_{j=1}^{l(N)} k_j\ \lambda(g_j).$$

D'après le Lemme 3.20 ,

$$\kappa(X_N...X_1) - \sum_{n=1}^{N}\lambda(X_n) = \kappa\big(g_1^{k_1}...g_{l(N)}^{k_{l(N)}}\big) - \sum_{j=1}^{l(N)} k_j\ \lambda(g_j) \in (1+l(N))\mathfrak{N}_{r,\varepsilon},$$

d'où

$$B_N \in \frac{1+l(N)}{N}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}.$$

Estimons maintenant $l(N)$. Par définition, $l(N) \leq \sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{X_n\neq e_G}$. Par la loi des grands nombres, on déduit que presque sûrement

$$\frac{l(N)}{N} \leq \frac{\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{X_n\neq e_G}}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1-t_0.$$

Donc il existe $\Omega_B \subset G^{\otimes \mathbb{N}^*}$ de $\mu_t^{\otimes \mathbb{N}^*}$-mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_B$, il existe un entier $N_{\omega,B} \geq 0$ tel que pour tout $N \geq \max(N_{\omega,B}, \frac{6}{1-t_0})$,

$$\frac{1+l(N)}{N} \leq \frac{4}{3}(1-t_0),$$

c'est-à-dire,

$$B_N(\omega) \in \frac{1+l(N)}{N}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon} \subset (1-t_0)\frac{4}{3}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}. \tag{3.3}$$

Estimons maintenant le dernier terme C_N. On réarrange d'abord la somme

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda(X_n) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i\in I}\frac{1}{N}\lambda(\gamma_i)\mathbf{1}_{X_n=\gamma_i} + \frac{1}{N}\lambda(e_G)\mathbf{1}_{X_n=e_G}\right)\\ &= \sum_{i\in I}\lambda(\gamma_i)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{X_n=\gamma_i}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}C_N &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda(X_n) - (1-t_0)\sum_{i\in I}t_i\lambda(\gamma_i)\\ &= \sum_{i\in I}\lambda(\gamma_i)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{X_n=\gamma_i} - (1-t_0)t_i\right).\end{aligned}$$

Or, de la même manière qu'au point précédent, pour tout $i \in I$, il existe $\Omega_i \subset G^{\otimes \mathbb{N}^*}$ de $\mu_t^{\otimes \mathbb{N}^*}$-mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_i$, il existe un entier $N_\omega \geq 0$ tel que pour tout $N \geq \max(N_\omega, \frac{6}{1-t_0})$,

$$\lambda(\gamma_i)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{X_n=\gamma_i} - (1-t_0)t_i\right) \in \frac{1-t_0}{3|I|}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon},$$

D'où, pour tout $\omega \in \bigcap_{i\in I}\Omega_i$, il existe un entier $N_\omega \geq 0$ tel que pour tout $N \geq \max(N_\omega, \frac{6}{1-t_0})$,

$$C_N(\omega) \in \frac{1-t_0}{3}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}. \tag{3.4}$$

On choisit maintenant $\omega \in \Omega_A \cap \Omega_B\big(\bigcap_{i\in I}\Omega_i\big)$ et pour $N \geq \sup(N_\omega, N'_\omega, \frac{6}{1-t_0})$ on déduit,

$$A_N(\omega) + B_N(\omega) + C_N(\omega) \in \frac{1-t_0}{3}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon} + \frac{4(1-t_0)}{3}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon} + \frac{1-t_0}{3}\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}.$$

D'où le résultat voulu

$$\sigma_{\mu_t} - \sum_{i\in I}t_i\lambda(\gamma_i) \in 2(1-t_0)\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}.$$

$\square$

3.4 Le théorème de surjectivité

Au vu des hypothèses du Lemme 3.21, dans toute la suite du chapitre, on travaille avec l'espace de mesures à support fini $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$. Dans cette partie, on prouve la Proposition suivante.

Proposition 3.22. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire connexe de type non-compact et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G.*

Alors pour tout $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, il existe un sous-cône convexe fermé $\mathcal{C}_\theta \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, d'intérieur non vide et il existe $v \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta$ tels que

- $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta$,
- $v + \mathcal{C}_\theta \subset \sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma))$.

De plus, si Γ contient e_G, alors $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta \subset \sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma))$.

Démontrons d'abord que cette Proposition permet de déduire le Théorème 3.5 de surjectivité.

Preuve que la Proposition 3.22 implique le Théorème 3.5 : Commençons par prouver la surjectivité de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{P}\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \mathbb{R}\sigma_\mu. \end{aligned}$$

Cette appplication est bien à valeurs dans $\mathbb{P}\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$ d'après le Théorème 3.4 de localisation. De plus, elle est continue d'après le Corollaire 3.13. Maintenant, appliquons la Proposition 3.22. Pour tout $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, il existe un cône convexe fermé d'intérieur non vide $\mathcal{C}_\theta \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$ et un point $v \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta$ tels que

$$v + \mathcal{C}_\theta \subset \sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)).$$

Or toute demi-droite de l'intérieur du cône $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta$ intersecte le cône translaté $v + \mathcal{C}_\theta$ en une demi-droite. Cela entraîne projectivement

$$\mathbb{P}\overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta \subset \mathbb{P}(\sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma))).$$

En particulier, $\mathbb{R}\theta \in \mathbb{P}(\sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)))$, puisque θ est dans l'intérieur du cône $\mathcal{C}_\theta$. D'où la surjectivité de l'application

$$\mu \in \mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma) \longmapsto \mathbb{R}\sigma_\mu \in \mathbb{P}\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Si maintenant $e_G \in \Gamma$, l'application directe de la même Proposition permet de conclure que

$$\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma) = \bigcup_{\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)} \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta \subset \sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)).$$

□

Donnons maintenant les idées de la preuve de cette Proposition 3.22. Elle s'articule en cinq étapes :

(1) Le premier Lemme 3.23 permet de construire, pour toute direction θ de l'intérieur du cône limite, une famille $S \subset \Gamma$ de $r_G = \dim \mathfrak{a}$ éléments vérifiant plusieurs conditions techniques, dont celle d'engendrer un sous-semigroupe $(r, \varepsilon)-$Schottky Zariski dense de G. Une fois cette famille génératrice construite, on définit le cône $\mathcal{C}_\theta$.

(2) Le Lemme 3.25 permet de recouvrir un translaté de ce cône par une famille de simplexes à $\dim \mathfrak{a} + 1$ sommets de $\mathfrak{a}$, non inclus dans un hyperplan de $\mathfrak{a}$, dont les sommets sont les projections de Jordan d'éléments du sous-semigroupe engendré par S. Or l'unicité des coordonnées barycentriques pour ces simplexes de $\mathfrak{a}$ permet d'associer, pour chaque point d'un tel simplexe, une unique mesure de probabilité dans $\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)$.

(3) Grâce au Lemme 3.21 et au Corollaire 3.13, on définit, pour chaque simplexe de la famille construite à l'étape 2, une application continue à valeurs dans $\mathfrak{a}$, déplaçant de manière contrôlée les points.

(4) On applique le Lemme 3.26, avatar du Théorème de point fixe de Brouwer, sur ces applications et on obtient la preuve de la Proposition grâce au Lemme 3.25 de convexité.

(5) Enfin, dans le cas où Γ contient l'identité, on démontre qu'on va pouvoir contracter de manière uniforme vers 0, la famille de simplexes donnée dans l'étape 2 ainsi que le terme d'erreur dans le Lemme 3.21 d'estimation.

Le premier paragraphe est centré autour au Lemme 3.23. Le second paragraphe contient la preuve du Lemme 3.25 de convexité. Dans le troisième paragraphe, je détaille, par commodité pour le lecteur ou la lectrice la preuve du Lemme 3.26 topologique. Enfin, dans le dernier paragraphe, je prouve la Proposition où est détaillée l'étape (3).

3.4.1 Une construction de sous-semigroupes Schottky

Dans ce premier paragraphe, on prouve le Lemme de construction suivant.

Lemme 3.23. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire connexe de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G.*

Alors pour tout θ dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$, il existe

(a) un ensemble fini $S \subset \Gamma$,

(b) un réel strictement positif $r_0 > 0$,

(c) une suite de réels strictement positifs $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\to} 0$,

tels que

(i) pour tout $r \in]0, r_0]$ il existe un rang $N_r \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N_r$, la famille $S_n := \{\gamma^n \mid \gamma \in S\} \subset \Gamma$ engendre un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon_n)-$Schottky Zariski dense dans G,

(ii) $\lambda(S)$ est une base de $\mathfrak{a}$,

(iii) θ est dans l'intérieur du cône convexe $C(\lambda(S)) := \sum_{\gamma \in S} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)$.

Pour prouver ce Lemme, on utilise le Lemme 4.3 de l'article [Ben97b] dans une formulation légèrement différente. Les explications qui suivent sont un peu techniques, si on n'a pas l'énoncé de l'article originel en tête. On ne traite ni le cas d'une suite infinie de cônes ouverts, ni la construction des sous-groupes. Y. Benoist énonce son Lemme pour des groupes de Lie définis sur des corps plus généraux. Comme on s'est placé dans le cadre des groupes de Lie semisimples réels linéaires, on omet l'hypothèse additionnelle "Γ non borné modulo le centre de G". De plus, comme tout sous-semigroupe Zariski dense d'un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact contient des éléments loxodromiques (cf [BQ16b, Théorème 6.36]), on omet aussi le paramètre θ de la formulation originelle du Lemme.

Dans tout l'article [Ben97b], Y. Benoist omet le paramètre r qui contrôle la distance entre les différents bords des bassins d'attractions des éléments loxodromiques et leurs points attractifs. Une lecture attentive de la preuve de ce Lemme permet de le faire réapparaître.

Proposition 3.24 (Lemme 4.3 [Ben97b])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire connexe de type non-compact. Soit Γ un sous-semi-groupe Zariski dense de G. Soit $(\Omega_j)_{j\in J}$ une suite finie, de longueur au moins 2, formée de cônes ouverts de $\mathfrak{a}^{++}$ qui intersectent le cône $\mathcal{C}(\Gamma)$.*

Alors il existe une famille d'éléments $S := \{\gamma_j\}_{j\in J}$ de Γ vérifiant

(1) Pour tout $j \in J$, l'élément γ_j est loxodromique, avec $\lambda(\gamma_j) \in \Omega_j$.

(2) Pour tout $g, h \in S$, la paire $(g^+, h^-) \in \mathcal{F}^{(2)}$ est en position générale i.e.

$$\mathrm{d}(g^+, \mathcal{X}(h^-)) > 0.$$

(3) Pour tout $j \in J$, le semigroupe engendré par γ_j est Zariski connexe[1].

(4) Le sous-semigroupe engendré par γ_1 et γ_2 est Zariski dense dans G.

Et pour un tel choix, le réel suivant

$$r_0 := \frac{1}{6}\inf\{\mathrm{d}(g^+, \mathcal{X}(h^-)) \mid g, h \in S\}$$

est strictement positif et il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs convergeant vers 0 telle que pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe un entier $N_r \geq 1$ à partir duquel pour tout $n \geq N_r$, le sous-semigroupe Γ_n engendré par $(\gamma_j^n)_{j\in J}$ est fortement $(r, \varepsilon_n)-$Schottky, discret et Zariski dense dans G.

Démonstration du Lemme 3.23 : Fixons un point θ dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$. Posons $r_G := \dim \mathfrak{a}$.

On commence par construire une famille de r_G sous-cônes ouverts du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$. Considérons une carte affine de $\mathbb{P}(\mathfrak{a})$ contenant $\mathbb{R}\theta$. Comme $\mathbb{R}\theta$ est un point de l'ouvert non vide $\mathbb{P}(\mathring{\mathcal{C}}(\Gamma))$, il admet, dans $\mathbb{P}(\mathring{\mathcal{C}}(\Gamma))$, un voisinage ouvert non vide, qui dans cette carte est convexe et polygonal, avec r_G sommets distincts centrés en $\mathbb{R}\theta$. Notons $p := (\mathbb{R}p_i)_{1\leq i\leq r_G}$ la famille des sommets de ce voisinage convexe et $\mathrm{Conv}(p)$ l'enveloppe convexe de ces points. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\mathcal{V}_{\delta_0}(\mathrm{Conv}(p))$ est inclus dans $\mathbb{P}(\mathring{\mathcal{C}}(\Gamma))$.

[1] Le lecteur ou la lectrice pourra consulter le Chapitre 6 du livre [BQ16b] pour plus de détails sur la topologie de Zariski

Choisissons maintenant $0 < \delta \leq \inf\left(\delta_0, \frac{1}{3}d(\mathbb{R}\theta, \partial\mathrm{Conv}(p))\right)$ de sorte que

$$\mathbb{R}\theta \in \mathrm{Conv}(p) \setminus \mathcal{V}_\delta(\partial\mathrm{Conv}(p)).$$

Notons $C_p \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{V}_\delta(\partial C_p)$) le sous-cône fermé (resp. ouvert) d'image projective $\mathrm{Conv}(p)$ (resp. $\mathcal{V}_\delta(\partial\mathrm{Conv}(p))$). Pour tout $1 \leq i \leq r_G$, on considère $(\Omega_i)_{1\leq i\leq r_G}$ la famille des sous-cônes ouverts tels que $\mathbb{P}(\Omega_i) := B_{\mathbb{P}(\mathfrak{a})}(p_i, \delta)$.

Appliquons enfin la Proposition 3.24 à la famille de cônes ouverts non vides disjoints $(\Omega_i)_{1\leq i\leq r_G}$. Considérons donc une famille $S := (\gamma_i)_{1\leq i\leq r_G} \subset \Gamma$ d'éléments loxodromiques. En particulier, pour tout $1 \leq i \leq r_G$ les projections de Jordan $\lambda(\gamma_i)$ sont dans Ω_i et pour tout $i \neq j$,

$$\mathrm{d}(\gamma_i^+, \mathcal{X}(\gamma_j^-)) > 0.$$

Et pour un tel choix, le réel

$$r_0 := \frac{1}{6}\inf\{\mathrm{d}(\gamma_i^+, \mathcal{X}(\gamma_j^-)) \mid 1 \leq i \neq j \leq r_G\}$$

est strictement positif. On considère la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs convergeant vers 0 donné par la Proposition 3.24. Pour ces choix (a) de S, (b) de r_0 et (c) de (ε_n), montrons les conditions (i) à (iv).

D'après cette Proposition 3.24, pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe un entier $N_r \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N_r$, le sous-semigroupe Γ_n engendré par la famille $S_n := (\gamma_j^n)_{j\in J}$ est fortement $(r, \varepsilon_n)-$Schottky, discret et Zariski dense dans G. D'où la condition (i).

Par construction, $\lambda(S)$ est une famille de r_G éléments linéairement indépendants de $\mathfrak{a}$, ce qui valide la condition (ii).

Posons $C(\lambda(S)) := \sum_{\gamma\in S}\mathbb{R}_+\lambda(\gamma)$. Par construction de C_p et de $\mathcal{V}_\delta(\partial C_p)$, on déduit que $\theta \in C_p \setminus \mathcal{V}_\delta(\partial C_p)$. Comme pour tout $1 \leq i \leq r_G$, on a choisi $\lambda(\gamma_i) \in \Omega_i$, on en déduit que dans une carte affine projective, la famille de points $(\mathbb{R}\lambda(\gamma_i))_{1\leq i\leq r_G}$ est $\delta-$proche de la famille de sommets du convexe $\mathrm{Conv}(p)$. Par conséquent, les bords des convexes respectifs sont aussi $\delta-$proches, ce qui permet d'en déduire que $\partial C(\lambda(S)) \subset \mathcal{V}_\delta(\partial C_p)$.

Ainsi, on obtient l'inclusion $C_p \setminus \mathcal{V}_\delta(\partial C_p) \subset \overset{\circ}{C}(S)$, ce qui permet d'en déduire la condition (iii) : θ est bien dans l'intérieur du cône $C(\lambda(S))$. □

3.4.2 Un lemme de convexité

Dans ce paragraphe, je prouve un Lemme de convexité. Pour toute famille finie de points P d'un espace vectoriel V, l'enveloppe convexe, fermée, des points P est notée $\mathrm{Conv}(P)$.

On rappelle qu'on cône convexe fermé $\mathcal{C}$ est *saillant* lorsque $\mathcal{C} \cap -\mathcal{C} = \{0\}$.

Lemme 3.25. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $E \subset V$ un sous-ensemble fini de points de V non contenu dans un hyperplan de V. On suppose que $C(E) := \sum\limits_{u\in E}\mathbb{R}_+u$ est un cône convexe fermé, saillant, d'intérieur non vide de V.*

Alors pour tout point p de l'intérieur du cône $C(E)$, pour tout $\delta > 0$, il existe x dans l'intérieur de $C(E)$ tel que la famille d'ouverts

$$\left(\mathrm{Conv}(p, nE) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}(\partial\mathrm{Conv}(p, nE))\right)_{n\geq 1}$$

recouvre le cône translaté $p + x + C(E)$.

Démonstration : Pour tout $p \in \mathrm{C}(E)$, il existe des nombres positifs $(t_u(p))_{u\in E} \subset \mathbb{R}_+$ tels que

$$p = \sum_{u\in E} t_u(p)u.$$

On définit pour tout $p \in \mathrm{C}(E)$

$$N_p := \lceil \sum_{u\in E} t_u(p) \rceil + 1.$$

Montrons d'abord que

$$p + C(E) \subset \cup_{n\geq N_p} \mathrm{Conv}(p, nE).$$

Soit $x \in p + C(E)$. Il s'écrit

$$x = \sum_{u\in E} t_u u$$

avec $t_u \geq t_u(p)$. Soit un entier $n \geq \sum_{u\in E} t_u$. Montrons que $x \in \mathrm{Conv}(p, nE)$.

Calculons d'abord les coordonnées barycentriques du point x par rapport aux sommets du convexe $\mathrm{Conv}(p, nE)$. On définit

$$\tilde{t}_{p,n} := \frac{n - \sum_{u\in E} t_u}{n - \sum_{u\in E} t_u(p)}.$$

Par définition, $\tilde{t}_{p,n} \geq 0$. Prouvons que $\tilde{t}_{p,n} \leq 1$. Puisque pour tout $u \in E$, on a $t_u \geq t_u(p)$, on en déduit

$$\sum_{u\in E} t_u \geq \sum_{u\in E} t_u(p).$$

D'où

$$n - \sum_{u\in E} t_u \leq n - \sum_{u\in E} t_u(p).$$

Ce qui permet d'obtenir en divisant par le terme de droite que $\tilde{t}_{p,n} \leq 1$. On réécrit alors x comme

$$\begin{aligned} x = \sum_{u\in E} t_u u &= \sum_{u\in E} \frac{t_u}{n} nu \\ &= \sum_{u\in E} \frac{t_u - \tilde{t}_{p,n} t_u(p)}{n} nu + \tilde{t}_{p,n} p. \end{aligned}$$

On vérifie par un calcul que

$$\sum_{u\in E} \frac{t_u - \tilde{t}_{p,n} t_u(p)}{n} \ + \ \tilde{t}_{p,n} = 1.$$

On définit

$$\tilde{t}_{u,n} := \frac{t_u - \tilde{t}_{p,n} t_u(p)}{n}.$$

Comme $\tilde{t}_{p,n} \in [0,1]$ et puisque pour tout $u \in E$ on a $t_u \geq t_u(p)$, on déduit que pour tout $u \in E$, le réel $\tilde{t}_{u,n} = \frac{t_u - \tilde{t}_{p,n} t_u(p)}{n}$ est positif et dans $[0,1]$. De plus, on peut réécrire ainsi x

$$x = \sum_{u\in E} \tilde{t}_{u,n} nu + \tilde{t}_{p,n} p.$$

Ceci est une écriture de x comme une combinaison convexe de p et des points de nE. D'où

$$p + C(E) = \sum_{u \in E} [t_u(p), +\infty[u \subset \bigcup_{n \geq N_p} \mathrm{Conv}(p, nE)$$

Pour tout réel $\delta > 0$, on définit

$$h_\delta(p) := \sup_{n \geq N_p} \frac{n\delta}{\mathrm{diam}(\mathrm{Conv}(p, nE))}.$$

Soit $x \in \mathrm{Conv}(p, nE)$ et soient $\tilde{t}_p, (\tilde{t}_u)_{u \in E} \subset \mathbb{R}_+$ avec $\tilde{t}_p + \sum_{u \in E} \tilde{t}_u = 1$, tels que

$$x = \sum_{u \in E} \tilde{t}_u n u + \tilde{t}_p p.$$

Par définition de h_δ, si les coefficients vérifient pour un certain $n \geq 1$

$$\inf\big(\tilde{t}_p, \inf_{u \in E} \tilde{t}_u\big) > \frac{h_\delta}{n},$$

alors le point x est à distance au plus δ du bord $\partial\mathrm{Conv}(p, nE)$, i.e.

$$x = \tilde{t}_p p + \sum_{u \in E} \tilde{t}_u n u \notin \overline{\mathcal{V}_\delta}\big(\partial\mathrm{Conv}(p, nE)\big).$$

Soit $x \in \sum_{u \in E} [t_u(p) + h_\delta(p), +\infty[u$ et soient $(t_u)_{u \in E} \in \prod_{u \in E} [t_u(p) + h_\delta(p), +\infty[$ tels que

$$x = \sum_{u \in E} t_u u.$$

Alors pour tout entier $n \geq N_p$, tel que $n \geq \sum_{u \in E} t_u$, les réels positifs

$$\tilde{t}_{p,n} = \frac{n - \sum_{u \in E} t_u}{n - \sum_{u \in E} t_u(p)}$$

$$\tilde{t}_{u,n} = \frac{t_u - \tilde{t}_{p,n} t_u(p)}{n}$$

sont des coefficients dans $\mathrm{Conv}(p, nE)$ du point x,

$$x = \sum_{u \in E} t_u u = \sum_{u \in E} \tilde{t}_{u,n} n u + \tilde{t}_{p,n} p.$$

Or

$$\lim_{n + \infty} \tilde{t}_{p,n} = 1.$$

D'où pour tout $u \in E$,

$$\tilde{t}_{u,n} = \frac{t_u - t_u(p)}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Ainsi, à partir d'un certain rang $N_\delta \geq \sup(N_p, \sum_{u \in E} t_u)$, pour tout $n \geq N_\delta$,

$$\inf\big(\tilde{t}_{p,n}, \inf_{u \in E} \tilde{t}_{u,n}\big) > \frac{h_\delta}{n}.$$

D'où pour tout $n \geq N_\delta$

$$x = \tilde{t}_p p + \sum_{u \in E} \tilde{t}_u n u \notin \overline{\mathcal{V}_\delta}\big(\partial\mathrm{Conv}(p, nE)\big).$$

C'est-à-dire pour tout $n \geq N_\delta$,

$$x \in \mathrm{Conv}(p, nE) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}\big(\partial \mathrm{Conv}(p, nE)\big).$$

Enfin, on pose $x_\delta(p) := h_\delta(p) \sum_{u \in E} u$. On a bien $x_\delta(p) \in C(E)$. On déduit

$$p + x_\delta(p) + C(E) \subset \bigcup_{n \geq N_p} \mathrm{Conv}(p, nE) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}\big(\partial \mathrm{Conv}(p, nE)\big).$$

□

3.4.3 Un Lemme de nature topologique

Le Lemme suivant [Rud87, Lemme 7.23] est clé pour obtenir la surjectivité recherchée dans le Théorème 3.6. Nous en donnons une preuve par commodité du lecteur ou de la lectrice.

Lemme 3.26 ([Rud87])**.** *Soit $S \subset \mathbb{R}^k$ un sous ensemble de $k+1$ points qui n'est inclus dans aucun hyperplan affine. Soit $\delta > 0$ un réel assez petit de sorte que*

$$\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(S) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}(\partial \mathrm{Conv}(S))$$

est d'intérieur non vide. Soit $F : \mathrm{Conv}(S) \to \mathcal{V}_\delta(\mathrm{Conv}(S)) \subset \mathbb{R}^k$ une application continue telle que pour tout $x \in \partial \mathrm{Conv}(S)$,

$$\|x - F(x)\| < \delta.$$

Alors

$$F\Big(\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(S)\Big) \supset \mathrm{Conv}(S) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}(\partial \mathrm{Conv}(S)).$$

Démonstration : Tout d'abord fixons quelques notations. Soit $p \in \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(S)$, on identifie le bord du convexe $\partial \mathrm{Conv}(S)$ à $\partial B(0,1)$ par l'application continue suivante

$$\begin{aligned} b_p : \partial B(0,1) &\longrightarrow \partial \mathrm{Conv}(S) \\ u &\longmapsto \{p + \mathbb{R}_+ u\} \cap \partial \mathrm{Conv}(S). \end{aligned}$$

Cela permet d'identifier $\mathrm{Conv}(S)$ à la boule fermée $\overline{B(0,1)}$ par

$$\begin{aligned} s_p : \overline{B(0,1)} &\longrightarrow \mathrm{Conv}(S) \\ u &\longmapsto \begin{cases} p + \|u\|\Big(b_p\big(\frac{u}{\|u\|}\big) - p\Big) & \text{si } u \neq 0 \\ p & \text{si } u = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde qu'il existe un point $p \in \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(S) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}(\partial \mathrm{Conv}(S))$ tel que $p \notin F\Big(\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(S)\Big)$. Comme p est loin du bord de $\mathrm{Conv}(S)$, pour tout $u \in \partial B(0,1)$

$$\|s_p(u) - p\| > \delta.$$

Or par hypothèse, $F(\partial \mathrm{Conv}(S)) \subset \mathcal{V}_\delta(\partial \mathrm{Conv}(S))$. On déduit donc

$$p \notin F(\mathrm{Conv}(S)).$$

On va maintenant définir une application continue ϕ de la boule fermée dans elle-même et on va démontrer qu'elle est sans point fixe. Posons

$$\begin{aligned}\phi : \overline{B(0,1)} &\longrightarrow \overline{B(0,1)}\\ u &\longmapsto \frac{p - F\big(s_p(u)\big)}{\|p - F\big(s_p(u)\big)\|}.\end{aligned}$$

L'application ϕ est bien définie, continue et à valeurs dans $\partial B(0,1)$, elle est donc sans point fixe dans la boule ouverte $B(0,1)$. Prouvons qu'elle n'a pas non plus de point fixe sur le bord de la boule. Pour tout $u \in \partial B(0,1)$, on calcule

$$\begin{aligned}\big\langle s_p(u) - p, p - F\big(s_p(u)\big)\big\rangle &= \big\langle s_p(u) - p, p - s_p(u)\big\rangle + \big\langle s_p(u) - p, s_p(u) - F\big(s_p(u)\big)\big\rangle,\\ \big\langle s_p(u) - p, p - F\big(s_p(u)\big)\big\rangle &\leq \|s_p(u) - p\|\Big(- \|s_p(u) - p\| + \big\|s_p(u) - F\big(s_p(u)\big)\big\|\Big).\end{aligned}$$

Or

$$-\|s_p(u) - p\| + \big\|s_p(u) - F\big(s_p(u)\big)\big\| < -\|s_p(u) - p\| + \delta < 0.$$

Donc $\big\langle s_p(u) - p, p - F\big(s_p(u)\big)\big\rangle < 0$ lorsque $u \in \partial B(0,1)$. Ainsi $\langle u, \phi(u)\rangle < 0$ sur $\partial B(0,1)$. Donc ϕ est sans point fixe sur le bord $\partial B(0,1)$. L'application ϕ est continue, envoie la boule fermée $\overline{B(0,1)}$ sur elle-même sans point fixe, c'est impossible par le Théorème du point fixe de Brouwer. $\square$

3.4.4 Preuve de la Proposition 3.22

Rappelons les hypothèses, G est un groupe de Lie semisimple réel linéaire connexe de type non-compact et Γ est un sous-semigroupe Zariski dense de G.

Démonstration de la Proposition 3.22 : Soit $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$ un point de l'intérieur du cône de Benoist. Posons $r_G := \dim \mathfrak{a}$.

D'après le Lemme 3.23, on choisit une famille finie $S = (g_i)_{1\leq i\leq r_G}$ de r_G éléments de Γ. Considérons le réel $r_0 > 0$ et la suite $\varepsilon_n \to 0$ associés tels que

(i) θ est dans l'intérieur de $C(\lambda(S)) := \sum_{g\in S} \mathbb{R}_+\lambda(g)$,

(ii) $\lambda(S)$ est une base de $\mathfrak{a}$,

(iii) pour tout $r \in]0, r_0]$, il existe un rang $N_r \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N_r$, la famille $S_n := (g_i^n)_{1\leq i\leq r_G}$ engendre un sous-semigroupe $(r, \varepsilon_n)-$Schottky Zariski dense dans G.

Utilisons maintenant les estimations du Lemme 3.20 sur les sous-semigroupes $(r, \varepsilon_n)-$Schottky et considérons le compact $\mathfrak{N}_{r,\varepsilon_n} \subset \mathfrak{a}$ donné dans les hypothèses du Lemme. Comme $\lambda(S) \subset \mathfrak{a}^{++}$ est une base de $\mathfrak{a}$, le point $\frac{1}{r_G}\sum_{g\in S}\lambda(g)$ est dans l'intérieur du cône $C(\lambda(S))$. Donc par compacité de $\mathfrak{N}_{r,\varepsilon_0}$, l'intersection entre le cylindre

$$r_G\mathfrak{N}_{r,\varepsilon_0} + \mathbb{R}\frac{1}{r_G}\sum_{g\in S}\lambda(g)$$

et le cône $\overset{\circ}{C}(\lambda(S))$ contient

$$r_G\mathfrak{N}_{r,\varepsilon_0} + [T, +\infty[\frac{1}{r_G}\sum_{g\in S}\lambda(g).$$

Fixons un entier k assez grand tel que

$$k\sum_{g\in S}\lambda(g) + r_G\mathfrak{N}_{r,\varepsilon_0} \subset \overset{\circ}{C}(\lambda(S)).$$

Posons $h_k := g_1^k ... g_{r_G}^k$. D'après le Lemme 3.20,

$$\lambda(h_k) - k\sum_{g\in S}\lambda(g) \in r_G\mathfrak{N}_{r,\varepsilon_0},$$

et par choix de l'entier k, on déduit que

$$\lambda(h_k) \in \overset{\circ}{C}(\lambda(S)).$$

Appliquons maintenant le Lemme de convexité 3.25 au point $\lambda(h_k)$, pour le cône engendré par $\lambda(S)$ dans la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}$. Pour tout réel $\delta > 0$, il existe $x \in \overset{\circ}{C}(\lambda(S))$ tel que la famille d'ouverts

$$\Big(\mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}\partial\mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n))\Big)_{n\geq 1}$$

recouvre $\lambda(h_k) + x + C(\lambda(S))$.

Choisissons maintenant δ grâce au Lemme 3.21 d'estimation sur le vecteur de Lyapunov et au Lemme topologique 3.26. Pour tout $n \geq 1$, remarquons que $\lambda(S_n)$ est une base de $\mathfrak{a}$. Par unicité des coordonnées barycentriques, pour tout $n \geq 1$ assez grand, on identifie

$$\Delta := \left\{(t_i)_{0\leq i\leq r_G} \subset \mathbb{R}_+^{1+r_G} \mid t_0 + ... + t_{r_G} = 1\right\}$$

avec

$$\mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)) = \left\{t_0\lambda(h_k) + \sum_{i=1}^{r_G} t_i\lambda(g_i^n) \,\middle|\, (t_i)_{0\leq i\leq r_G} \subset \Delta\right\},$$

par l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} p_n : \Delta &\longrightarrow \mathrm{Conv}(\lambda(g_0), \lambda(S_n)) \\ t &\longmapsto t_0\lambda(h_k) + \sum_{i=1}^{r_G} t_i\lambda(g_i^n). \end{aligned}$$

Posons $N_{r,\varepsilon} := \sup_{x\in\mathfrak{N}_{r,\varepsilon}} \|x\|$. Pour tout $n \geq 1$, on définit l'application

$$F_n : \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)) \longrightarrow \mathcal{V}_{2N_{r,\varepsilon}}(\mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)))$$

qui à tout point $p_n(t) \in \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(h_k), \lambda(S_n))$ associe le vecteur de Lyapunov σ_{μ_t} de la mesure

$$\mu_t := t_0\delta_{h_k} + \sum_{i=1}^{r_G} t_i\delta_{g_i^n}.$$

Pour tout $n \geq 1$, en utilisant le Corollaire 3.13, on déduit que les applications F_n sont continues. De plus, d'après le Lemme 3.21, pour tout point $p \in \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(h_k), \lambda(S_n))$, alors

$$F_n(p) \in B_{\mathfrak{a}}(p, 2N_{r,\varepsilon}).$$

Pour appliquer le Lemme 3.26 topologique, il faut plutôt des boules fermées, alors qu'ici on a des boules ouvertes. On "épluche" donc nos convexes. Soit $\rho > 0$, assez petit pour que les convexes suivants

$$\Delta_\rho := \left\{(t_i)_{0\leq i\leq \dim \mathfrak{a}} \subset [\rho, +\infty[^{1+\dim \mathfrak{a}} \;\middle|\; t_0 + ... + t_{\dim \mathfrak{a}} = 1\right\},$$

$$\mathrm{Conv}_\rho(\lambda(g_0), \lambda(S_n)) := p_n(\Delta_\rho)$$

soient d'intérieur non vide. Remarquons que

$$\Delta_\rho \subset \overset{\circ}{\Delta}$$

$$\mathrm{Conv}_\rho(\lambda(g_0), \lambda(S_n)) \subset \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(g_0), \lambda(S_n)).$$

On applique le Lemme 3.26 à l'application continue F_n en restriction au convexe fermé $\mathrm{Conv}_\rho(\lambda(g_0), \lambda(S_n))$. Pour tout $\rho > 0$,

$$F_n(\mathrm{Conv}_\rho(\lambda(g_0), \lambda(S_n))) \supset \mathrm{Conv}_\rho(\lambda(g_0), \lambda(S_n)) \setminus \overline{\mathcal{V}_{2N_{r,\varepsilon}}}(\partial \mathrm{Conv}_\rho(\lambda(g_0), \lambda(S_n))).$$

En choisissant $\rho > 0$ assez petit, on en déduit que

$$F_n(\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(g_0), \lambda(S_n))) \supset \mathrm{Conv}(\lambda(g_0), \lambda(S_n)) \setminus \overline{\mathcal{V}_{3N_{r,\varepsilon}}}(\partial \mathrm{Conv}(\lambda(g_0), \lambda(S_n))).$$

Récapitulons. On a prouvé que pour tout $n \geq 1$,

$$\sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)) \supset \mathrm{Conv}(\lambda(g_0), \lambda(S_n)) \setminus \overline{\mathcal{V}_{3N_{r,\varepsilon}}}(\partial \mathrm{Conv}(\lambda(g_0), \lambda(S_n))).$$

Or pour $\delta = 3N_{r,\varepsilon}$, il existe $x \in \overset{\circ}{C}(\lambda(S))$ donné par le Lemme 3.25 tel que la famille d'ouverts

$$\Big(\mathrm{Conv}(\lambda(g_0), \lambda(S_n)) \setminus \overline{\mathcal{V}_\delta}\partial \mathrm{Conv}(\lambda(g_0), \lambda(S_n))\Big)_{n\geq 1}$$

recouvre $\lambda(g_0) + x + C(\lambda(S))$.

Donc

$$\lambda(g_0) + x + C(\lambda(S)) \subset \sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)).$$

Supposons maintenant que $e_G \in \Gamma$. On va pouvoir contracter de manière uniforme vers 0 la famille de simplexes donnée dans l'étape 2 ainsi que le terme d'erreur dans le Lemme 3.21 d'estimation. Pour tout $n \geq 1$ et $\epsilon > 0$, on définit l'application

$$F_{n,\epsilon} : \epsilon\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)) \longrightarrow \epsilon\mathcal{V}_{2N_{r,\varepsilon}}(\mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)))$$

qui à tout point $\epsilon p_n(t) \in \epsilon\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(h_k), \lambda(S_n))$, où $t = (t_i)_{0\leq i\leq r_G} \subset]0,1[^{r_G+1}$ avec $\sum_{i=0}^{r_G} t_i = 1$, associe le vecteur de Lyapunov $\sigma_{\epsilon\mu_t+(1-\epsilon)\delta_{e_G}}$ de la mesure $\epsilon\mu_t + (1-\epsilon)\delta_{e_G}$ où

$$\mu_t := t_0\delta_{h_k} + \sum_{i=1}^{r_G} t_i\delta_{g_i^n}.$$

Par le Lemme 3.21, on déduit que pour tout $p \in \overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(h_k), \lambda(S_n))$, alors

$$F_{n,\epsilon}(\epsilon p) \in B_{\mathfrak{a}}(\epsilon p, 2\epsilon N_{r,\varepsilon}).$$

De la même manière que précédemment, on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\epsilon\mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)) \setminus \overline{\mathcal{V}_{3\epsilon N_{r,\varepsilon}}}\partial\epsilon\mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)) \;\subset\; F_{n,\epsilon}(\epsilon\overset{\circ}{\mathrm{Conv}}(\lambda(h_k), \lambda(S_n))).$$

Or la famille d'ouverts

$$\Big(\epsilon \mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n)) \setminus \overline{\mathcal{V}_{3\epsilon N_{r,\varepsilon}}} \partial \epsilon \mathrm{Conv}(\lambda(h_k), \lambda(S_n))\Big)_{n \geq 1}$$

recouvre $\epsilon\Big(\lambda(h_k)+x+C(\lambda(S))\Big) = \epsilon(\lambda(h_k)+x)+C(\lambda(S))$. On a donc prouvé que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\epsilon(\lambda(h_k) + x) + C(\lambda(S)) \subset \sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)).$$

Par un calcul élémentaire, on en déduit en faisant tendre ϵ vers 0 que

$$\overset{\circ}{C}(\lambda(S)) \subset \sigma(\mathcal{M}_Z^{s.f}(\Gamma)).$$

□

3.5 Le théorème de surjectivité de Ç. Sert et E. Breuillard

Soit $S \subset G$ un sous-ensemble *compact* de G tel que le semigroupe engendré par S est Zariski dense dans G. Ç. Sert et E. Breuillard prouvent dans le [BS18, Théorème 1.3], sous ces hypothèses, que les suites

$$\frac{1}{n}\kappa(S^n),\ \frac{1}{n}\lambda(S^n)$$

convergent au sens de Hausdorff lorsque $n \to +\infty$ vers le même sous-ensemble compact de $\mathfrak{a}^+$, noté $J(S)$. Cet ensemble $J(S)$ est appelé le *spectre joint*. On suppose que S n'est inclus dans aucun sous-groupe fermé connexe strict de G contenant $[G, G]$. Ils démontrent dans les [BS18, Théorèmes 1.4 et 1.5] qu'alors $J(S)$ est convexe, d'intérieur non vide, que pour tout ensemble compact convexe d'intérieur non vide J de $\mathfrak{a}^+$, il existe un sous-ensemble compact $S' \subset G$, tel que le sous-groupe engendré par S' est Zariski dense dans G et $J = J(S')$.

En utilisant des arguments de déviations dûs au Théorème centrale limite, Ç. Sert a prouvé dans sa thèse que $\sigma(\mathcal{M}_Z^2(S)) \subset \overset{\circ}{J}(S)$ (on trouvera une preuve dans [BS18, Théorème 1.9]). Il est assez naturel de se demander si la réciproque est vraie. Ç Sert et E. Breuillard fournissent un contre-exemple [BS18, Proposition 1.10], il n'est pas possible, en général, de remplir $\overset{\circ}{J}(S)$ de vecteurs de Lyapunov de marches aléatoires i.i.d. portées sur S.

Dans le [BS18, Théorème 1.11], ils prouvent que l'intérieur du spectre joint est rempli de vecteurs de Lyapunov de processus ergodiques. C'est dans la preuve de ce Théorème qu'ils utilisent le même argument de surjectivité que celui de la preuve du Théorème 3.5.

3.5.1 Le spectre joint et le cône limite de Benoist

Théorème 3.27 ([BS18])**.** *Soit G un groupe de Lie réductif connexe et soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G. Alors les suites*

$$\frac{1}{n}\kappa(S^n), \frac{1}{n}\lambda(S^n)$$

convergent lorsque $n \to +\infty$, pour la distance de Hausdorff, vers un même sous-ensemble compact de $\mathfrak{a}^+$. On appelle ce compact le spectre joint *de S et on le note $J(S)$. De plus, pour tout $x \in J(S)$, il existe une suite $(b_n)_{n\geq 0} \in S^{\mathbb{N}}$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\kappa(b_0 b_1 ... b_n) = x.$$

Il est assez aisé de relier le spectre joint avec le cône limite de Benoist. Soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G. Notons maintenant Γ_S le sous-semigroupe engendré par S. Alors, d'après le Théorème 3.2 [Ben97b]

$$\mathcal{C}(\Gamma_S) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{\substack{g\in\Gamma_S \\ \|\kappa(g)\|\geq n}} \mathbb{R}_+\kappa(g)}.$$

On en déduit que le cône de $\mathfrak{a}^+$ engendré par le spectre joint $J(S)$, noté $C(J(S))$ est le cône limite de Γ_S, i.e.

$$C(J(S)) = \mathcal{C}(\Gamma_S).$$

Lorsque Γ est un sous-groupe Zariski dense, le cône limite est convexe, fermé, d'intérieur non vide. Voici le résultat analogue pour le spectre joint.

Théorème 3.28 ([BS18])**.** *Soit G un groupe de Lie réductif connexe et soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G.*

Alors $J(S)$ est un fermé, convexe, compact de $\mathfrak{a}^+$. Notons $\mathfrak{a}_D$ l'algèbre de Lie engendré par $A \cap [G,G]$ et $\mathfrak{a}_S$ le sous-espace engendré par $J(S)$.

Alors

$$\mathfrak{a}_D \subset \mathfrak{a}_S \subset \mathfrak{a}.$$

De plus, $\mathfrak{a}_S = \mathfrak{a}$ i.e. $J(S)$ est d'intérieur non vide dès que S n'est inclus dans aucun sous-groupe fermé connexe strict de G contenant $[G,G]$.

Soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G. On suppose que S n'est inclus dans aucun sous-groupe fermé connexe strict de G contenant $[G,G]$. Pour toute mesure de probabilité μ à support dans S, dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense dans G, alors, par le Théorème 3.12 de la loi des grands nombres sur G, on déduit que $\sigma_\mu \in J(S)$.

Ç. Sert a démontré dans sa thèse que $\sigma_\mu \in \overset{\circ}{J}(S)$. On peut se demander si tous les points de l'intérieur du spectre joint sont des vecteurs de Lyapunov σ_μ où μ est une mesure de probabilité à support dans S. Il n'en est rien, puisque Ç. Sert et E. Breuillard ont construit le contre-exemple suivant.

Proposition 3.29 (Proposition 1.10 [BS18])**.** *Posons $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \{a, b\}$. Alors $J(S) = [0, \kappa(a)]$. De plus, l'application continue*

$$\begin{aligned}]0,1[&\longrightarrow]0, \kappa(a)] \\ t &\longmapsto \sigma_{t\delta_a + (1-t)\delta_b} \end{aligned}$$

atteint son maximum $\tilde{m}$ dans l'intervalle $]0,1[$, i.e.

$$\sup_{t\in[0,1]} \sigma_{t\delta_a+(1-t)\delta_b} = \sup_{t\in]0,1[} \sigma_{t\delta_a+(1-t)\delta_b}.$$

De plus, $\tilde{m} < \kappa(a)$ et l'application $t \mapsto \sigma_{t\delta_a+(1-t)\delta_b}$ est surjective dans $]0, \tilde{m}]$ mais pas dans $]0, \kappa(a)[$.

3.5.2 Le résultat de surjectivité de Ç Sert et E. Breuillard

Soit G un groupe de Lie réductif connexe et soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G. On suppose que S n'est inclus dans aucun sous-groupe fermé connexe strict de G contenant $[G, G]$. Rappelons que $\mathcal{M}_Z^{s.f}(S)$ est l'ensemble des mesures de probabilité

(i) à support fini dans S,

(ii) dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense dans G.

D'après le contre-exemple de la Proposition 3.29, l'application continue

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Z^{s.f}(S) &\longrightarrow \mathring{J}(S) \\ \mu &\longmapsto \sigma_\mu \end{aligned}$$

n'est en général pas surjective.

E. Breuillard et Ç. Sert ont démontré qu'il était quand même possible de réaliser tous les points de l'intérieur du spectre joint comme des moyennes de suites de la forme $(\kappa(X_1...X_n))_{n\geq 1}$, en modifiant les hypothèses sur la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$.

Soit T le décalage

$$\begin{aligned} T : S^{\mathbb{N}} &\longrightarrow S^{\mathbb{N}} \\ (X_n)_{n\geq 0} &\longmapsto (X_{n+1})_{n\geq 0}. \end{aligned}$$

Pour toute mesure $\beta \in \mathcal{M}(S^{\mathbb{N}})$ de probabilité $T-$invariante sur l'espace compact $S^{\mathbb{N}}$, rappelons que $(S^{\mathbb{N}}, T, \beta)$ est un système dynamique mesuré. On dit que $(S^{\mathbb{N}}, T, \beta)$ est *ergodique* si pour tout sous-ensemble borélien $A \subset S^{\mathbb{N}}$ telle que $T^{-1}(A) = A$, alors $\beta(A) \in \{0, 1\}$. Notons maintenant $\mathcal{ME}(S^{\mathbb{N}})$ l'ensemble des mesures de probabilités pour lesquelles ce système dynamique est ergodique. Alors, pour tout $\beta \in \mathcal{ME}(S^{\mathbb{N}})$, d'après le Théorème ergodique de Kingman, pour $\beta-$presque tout $X = (X_n)_{n\geq 1}$, la suite $\left(\frac{1}{n}\kappa(X_1...X_n)\right)_{n\geq 1}$ converge vers une limite indépendante de l'aléa. Notons celle-ci $\overrightarrow{\lambda}(\beta)$. Remarquons que $\overrightarrow{\lambda}(\mu^{\otimes \mathcal{N}}) = \sigma_\mu$, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_Z(S)$. Voici les résultats analogues [BS18] sur l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{ME}(S^{\mathbb{N}}) &\longrightarrow \mathfrak{a}^+ \\ \beta &\longmapsto \overrightarrow{\lambda}(\beta). \end{aligned}$$

Définition 3.30. *Un compact $S \subset G$ est dit dominé par G s'il existe $t > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, pour tout $i \in \{1, ..., \dim \mathfrak{a} - 1\}$, pour tout $g \in S^n$,*

$$\kappa_{i+1}(g) - \kappa_i(g) \leq -nt < 0.$$

En utilisant la précédente définition du même article, ils prouvent une proposition de continuité.

Proposition 3.31 ([BS18])**.** *Soit G un groupe de Lie réductif connexe et soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G. On suppose que S n'est inclus dans aucun sous-groupe fermé connexe strict de G contenant $[G, G]$ et est dominée par G.*

Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{ME}(S^{\mathbb{N}}) &\longrightarrow \mathfrak{a}^+ \\ \beta &\longmapsto \overrightarrow{\lambda}(\beta). \end{aligned}$$

est continue.

Voici maintenant le théorème de surjectivité de leur article.

Théorème 3.32 ([BS18])**.** *Soit G un groupe de Lie réductif connexe et soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G.*

Alors pour tout point x dans l'intérieur du spectre joint $J(S)$ vu comme sous-ensemble convexe compact d'intérieur non vide de $\mathfrak{a}_S \subset \mathfrak{a}$, il existe un processus ergodique stationnaire $(g_n)_{n\geq 0}$ sur $S^{\mathbb{N}}$ tel que presque sûrement

$$\frac{1}{n}\kappa(g_1...g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Ils prouvent le Lemme suivant, analogue au Lemme 3.23. On rappelle que ce dernier Lemme permettait de construire, pour toute direction θ de l'intérieur du cône limite, une famille $S \subset \Gamma$ de $\dim \mathfrak{a}$ éléments vérifiant plusieurs conditions techniques, dont celle d'engendrer un sous-semigroupe $(r, \varepsilon)-$Schottky Zariski dense de G.

Lemme 3.33. *Soit G un groupe de Lie réductif connexe et soit $S \subset G$ un sous-ensemble compact engendrant un sous-semigroupe Zariski dense dans G.*

Alors pour tout $0 < \varepsilon \leq r$, pour tout entier $l \in \mathbb{N}$, pour tout sous-ensemble fini $x_1, ..., x_l$ de points de l'intérieur relatif à $\mathfrak{a}_S$ et tout $\eta > 0$, il existe une famille d'entiers $(n_i)_{1\leq i\leq l} \in \mathbb{N}^l$ et $(g_i)_{1\leq i\leq l} \in \Gamma_S^l$ tel que

(i) la famille $(g_i)_{1\leq i\leq l}$ engendre un sous-semigroupe $(r, \varepsilon)-$Schottky,

(ii) $g_i \in S^{n_i}$, pour tout $1 \leq i \leq l$,

(iii) $\left\|\frac{\lambda(g_i)}{n_i} - x_i\right\| \leq \eta$, pour tout $1 \leq i \leq l$.

La preuve du Théorème 3.32 de surjectivité s'articule en quatre étapes, on se réfèrera à l'article pour les preuves en détails :

(1) Le Lemme précédent permet de construire, pour tout point x de l'intérieur relatif à $\mathfrak{a}_S$ du spectre joint, une famille $(g_i)_{1\leq i\leq l} \subset \Gamma_S^l$ de $l = \dim \mathfrak{a}_S + 1$ éléments et une famille d'entiers $(n_i)_{1\leq i\leq l}$ vérifiant entre autres que la famille de points $\left(\frac{\lambda(g_i)}{n_i}\right)_{1\leq i\leq l}$ forme les sommets d'un simplexe centré en x, noté Δ_x, et $(g_i)_{1\leq i\leq l}$ engendre un sous-semigroupe $(r, \varepsilon)-$Schottky Zariski dense de G.

(2) Grâce à l'unicité des coordonnées barycentriques pour les simplexes canoniques de $\mathfrak{a}_S$ et en factorisant d'une manière astucieuse le système dynamique $(S^{\mathbb{N}}, T)$, ils construisent pour chaque point de Δ_x, une mesure de probabilité ergodique de $\mathcal{ME}(S^{\mathbb{N}})$.

(3) Grâce à la Proposition 3.31 de continuité, cela permet de définir une application continue définie sur Δ_x et à valeurs dans $\mathfrak{a}_S$. Il démontrent que cette application déplace peu les points.

(4) Enfin, ils appliquent le Lemme 3.26, avatar du théorème de point fixe de Brouwer, à cette application pour obtenir la surjectivité.

Chapitre 4

Coordonnées de Hopf et Bruhat-Hopf

Dans ce chapitre, on introduit des systèmes de coordonnées de G/M et G dans lesquelles on lit de manière confortable l'action par multiplication à droite de A et AM. On étudie dans ces coordonnées l'action par multiplication à gauche d'éléments loxodromiques fortement contractants. Les trois dernières parties de ce chapitre ont été inspirées par l'article d'Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR07]. Elles permettront de clarifier certaines formulations et notations des résultats de leur article qui apparaîtront dans les chapitres 5 et 6.

Prenons le cas fortement étudié $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Alors $G/M = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ s'identifie au fibré unitaire tangent du demi-plan hyperbolique $T^1\mathbb{H}^2$ et l'action par multiplication à droite A sur G s'identifie au flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}^2$. Pour étudier l'action du flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}^2$ et l'action par multiplication à gauche de G sur cet espace, on peut utiliser le système de coordonnées de Hopf,

$$T^1\mathbb{H}^2 \simeq \left(\partial\mathbb{H}^2\right)^2 \setminus \Delta \ \times \mathbb{R}.$$

Où le bord considéré $\partial\mathbb{H}^2$ est obtenu grâce à la compactification par rayons géodésiques de $\mathbb{H}^2$. À tout vecteur unitaire $v \in T^1\mathbb{H}^2$, on associe dans ces coordonnées la classe asymptotique $v^+ \in \partial\mathbb{H}^2$ du projeté dans $\mathbb{H}^2$ de $(g^t(v))_{t\geq 0}$. On fait de même pour $(g^{-t}v)_{t\geq 0}$, pour obtenir la seconde coordonnée $v^- \in \partial\mathbb{H}^2$. Enfin, pour la troisième coordonnée réelle, on utilise par exemple le cocycle de Busemann $\beta_{v^+}(i, \pi_{\mathbb{H}^2}(v))$. L'action du flot géodésique se lit dans ces coordonnées par

$$g^t(v^+, v^- \ ; \ x) = (v^+, v^- \ ; \ x + t).$$

L'action par multiplication à gauche de G s'y lit par

$$g(v^+, v^- \ ; \ x) = (g.v^+, g.v^- \ ; \ x + \beta_{gv^+}(i, g.i)).$$

Dans la première partie, on se base sur la thèse de X. Thirion [Thi07, Chapter 8, §8.D] et des travaux suivants [GJT98], [Par18] et [BQ16b], pour expliquer la construction des coordonnées sur G/M, pour tout groupe de Lie semisimple réel linéaire, connexe de type non-compact. Essentiellement, le bord de Furstenberg $\mathcal{F}$ va jouer le même rôle que $\partial\mathbb{H}^2$ et on va remplacer la coordonnée réelle par une coordonnée à valeurs dans $\mathfrak{a}$. L'ensemble des couples de points en position générale de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ de la Définition 2.21, noté $\mathcal{F}^{(2)}$, va jouer le même rôle que $\left(\partial\mathbb{H}^2\right)^2 \setminus \Delta$. Le cocycle d'Iwasawa (cf. Définition 2.25) va alors remplacer le cocycle de Busemann. On obtient le système de coordonnées

$$G/M \simeq \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}.$$

L'action de G à gauche sur G/M se lit dans le système de coordonnées de Hopf $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$ de la manière suivante. Pour tout $g \in G$ et $(\xi, \eta\ ;\ v) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$,

$$g.(\xi, \eta\ ;\ v) = (g.\xi, g.\eta\ ;\ \sigma(g, \xi) + v).$$

Comme A et M commutent, l'action de A par multiplication à droite sur G induit l'action de A par multiplication à droite sur G/M. Celle-ci s'écrit dans ce système de coordonnées de la manière suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$ et $(\xi, \eta\ ;\ v) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$

$$\phi_1^\alpha \cdot (\xi, \eta\ ;\ v) = (\xi, \eta\ ;\ v + \alpha).$$

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on construit un système de coordonnées globales de G, le système de coordonnées d'Iwasawa-Hopf. Rappelons que $\mathcal{F} \simeq K/M$. On les appelle ainsi car elles sont construites grâce à la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. On relève les coordonnées $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$ de G/M dans un sous-ensemble de $K \times \mathcal{F} \times \mathfrak{a}$, noté $\mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$. Dans la Proposition 4.16 on prouve que ce système de coordonnées

$$G \simeq \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$$

est un difféomorphisme. Ce système de coordonnées globales de G permet de prouver une bonne partie des énoncés les deux dernières parties.

Ensuite, dans la troisième partie, on construit un système de coordonnées locales de G, les coordonnées de Bruhat-Hopf. On les appelle ainsi car elles sont construites grâce à la décomposition de Bruhat de G. Elles sont à valeurs dans $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$. Les cartes locales de G sont paramétrées par les éléments du sous-groupe compact maximal K, elles sont définies par $G_c := cN^- MAN$, où $c \in K$. Notons

$$\begin{cases} \mathcal{F}_c & := & G_c\eta_0 = cN^-\eta_0 = \mathcal{X}(c\check{\eta}_0)^\complement \\ \mathcal{F}_c^{(2)} & := & G_c(\eta_0, \check{\eta}_0). \end{cases}$$

On prouve dans la Proposition 4.34 que les cartes

$$G_c \simeq \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$$

sont des difféomorphismes. Dans la Définition 4.32, on introduit une famille de cocycles $(\sigma_{c_1,c_0})_{c_1,c_0 \in K}$, définis localement et à valeurs dans $\mathfrak{a} \times M$. Leurs projections dans M sont donnés dans la Définition 4.28, leur projection dans $\mathfrak{a}$ correspond au cocycle d'Iwasawa. Leurs propriétés sont décrites dans la Proposition 4.33. L'action par multiplication à gauche de G sur G se lit dans ce système de coordonnées $\left(\mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M\right)_{c \in K}$ de la manière suivante : fixons $c_0 \in K$, pour tout $g \in G$ et $(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0}^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$, soit $c_1 \in K$ tel que $g\eta \in \mathcal{F}_{c_1}$, alors

$$g.(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} = (g\eta, g\xi\ ;\ \sigma_{c_1,c_0}(g, \eta)u)_{c_1}.$$

L'action par multiplication à droite de $\mathfrak{a} \times M$ sur G se lit dans ce système de coordonnées $\left(\mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M\right)_{c \in K}$ de la manière suivante : fixons $c_0 \in K$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{a} \times M$ et $(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0}^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$,

$$\phi^\alpha(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} = (\eta, \xi\ ;\ u\alpha)_{c_0}.$$

Notons $\pi_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \times M \to \mathfrak{a}$ la projection naturelle. Pour tout $c \in K$, l'application

$$g \in G_c \longmapsto gM \in G/M$$

s'écrit dans les coordonnées $\mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$ par

$$(\eta, \xi \ ; \ u)_c \longmapsto (\eta, \xi \ ; \ \pi_{\mathfrak{a}}(u)) \in \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a}.$$

Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G \supset G_c \arrow[r, "\mathcal{H}_c"] \arrow[d] & \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M \arrow[d] \\ G/M \supset G_c M \arrow[r, "\mathcal{H}"] & \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

est commutatif, équivariant pour l'action par multiplication à droite de $\mathfrak{a} \times M$ et à gauche de G. Ces coordonnées explicitent les trivialisations locales de la section $G \overset{M}{\to} G/M$.

Dans la dernière partie, on commence, dans la Définition 4.40, par définir une famille d'applications $(\lambda_c)_{c \in K}$ à valeurs dans $\mathfrak{a} \times M$, de projections de Jordan généralisées. Pour tout $c \in K$, l'application λ_c est définie sur les éléments loxodromiques de G dont le point fixe attractif est dans la carte $\mathcal{F}_c$. Sa projection sur $\mathfrak{a}$ coïncide avec la projection de Jordan, elle encode donc la partie hyperbolique des éléments loxodromiques. Sa projection sur M encode la partie elliptique des éléments loxodromiques.
Comme dans le dernier paragraphe du Chapitre 2, on motive ce dernier paragraphe par les deux questions suivantes.

- Que peut-on dire sur la projection de Jordan généralisée, en particulier la partie elliptique, d'un produit d'éléments loxodromiques fortement contractants dont les points fixes attractifs et répulsifs sont en position générale ?

- Que peut-on dire sur la suite de points $(\sigma_{c,c_0}(g^n, \xi))_{n \geq 1}$ lorsque g est un élément loxodromique et ξ un point de son bassin d'attraction, où les éléments $c, c_0 \in K$ vérifient $(g^n \xi)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}_c$ et $\xi \in \mathcal{F}_{c_0}$?

De même que la Proposition 2.66 du chapitre 2 est un des points clés pour obtenir le Théorème 6.9 de mélange dans $\Gamma \backslash G/M$, la Proposition 4.50 est un des points clés pour prouver le Théorème 6.16 de mélange dans $\Gamma \backslash G$. Celle-ci est prouvée à la fin de ce chapitre, sans hypothèses particulières sur le sous-groupe M. Ce sera seulement dans le dernier chapitre de cette thèse qu'on supposera que M est abélien.

4.1 Coordonnées de Hopf sur G/M

Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit K un sous-groupe compact maximal de G. On rappelle (Chapitre 2) que G/K est une variété Riemannienne globablement symétrique de type non-compact. Posons $o = K$, ce sera un point base de l'espace symétrique. Notons $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K. Rappelons que la différentielle de la symétrie géodésique en o est une involution de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{p}$ l'espace propre pour la valeur propre -1 de cette involution de Cartan, de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan.

4.1.1 Plats paramétrés, espace des chambre de Weyl

Un *plat* de l'espace globalement symétrique G/K est un plongement totalement géodésique et isométrique d'un espace euclidien. Il est *maximal*, si c'est un plat de dimension maximale dans G/K. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on note A le tore déployé maximal associé. Rappelons (cf. Définition 2.12) que le rang réel de G, noté r_G, est alors la dimension de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{a}$.

Définition 4.1. *Un* plat paramétré *est un plongement de $\mathfrak{a}$ de la forme gf_0, où $g \in G$ et f_0 est définie par*

$$\begin{aligned} f_0 : \mathfrak{a} &\longrightarrow X \\ v &\longmapsto e^v o \quad . \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{W}$ l'espace des plats paramétrés de l'espace symétrique G/K. Pour tout plat paramétré $f \in \mathcal{W}$, le point $f(0)$ est appelé le point origine.

Par définition, l'espace des plats paramétrés est muni d'une action par multiplication à gauche de G. Rappelons que Σ désigne l'ensemble des racines restreintes de $\mathfrak{g}$, la chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$ est une composante connexe particulière de $\mathfrak{a} \setminus \cup_{\alpha\in\Sigma} \ker(\alpha)$. On note $\mathfrak{a}^{++}$ son intérieur. Notons $N_K(A)$ (resp. M) le normalisateur (resp. centralisateur) de A dans K, rappelons que $N_K(A)/M$ est le groupe de Weyl.

Proposition 4.2. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors

(i) le stabilisateur de f_0 dans G est M,

(ii) l'application

$$\begin{aligned} G/M &\longrightarrow \mathcal{W} \\ gM &\longmapsto gf_0 \end{aligned}$$

est une bijection $G-$équivariante,

(iii) le stabilisateur du plat maximal $f_0(\mathfrak{a})$ dans K est $N_K(A)$,

(iv) le stabilisateur de $f_0(\mathfrak{a})$ dans G est $N_K(A)A$.

Preuve. Démontrons d'abord (i), que le stabilisateur du plat paramétré f_0 est M. D'abord, $M \subset \mathrm{Stab}(f_0)$, puisque M centralise A.

Soit $g \in G$, tel que $gf_0 = f_0$. Pour tout $v \in \mathfrak{a}$, remarquons que

$$ge^v o = e^v o.$$

Donc pour tout $v \in \mathfrak{a}$, alors $e^{-v} g e^v \in K$.
En particulier, pour $v = 0$, on déduit d'une part que $g \in K$.
D'autre part, d'après la Proposition 2.17 (iv), la suite $(e^{-nv} g e^{nv})_{n\geq 1}$ est bornée pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$ si et seulement si $g \in MAN$. Or $MAN \cap K = M$. Donc $g \in M$ d'où le point (i).

Pour le point (ii), comme l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{W} \\ g &\longmapsto gf_0 \end{aligned}$$

est surjective par définition de $\mathcal{W}$ et $G-$équivariante et $\mathrm{Stab}(f_0) = M$, on en déduit que l'application
$gM \in G/M \mapsto gf_0 \in \mathcal{W}$ est une bijection $G-$équivariante.

Pour le point (iii), remarquons d'abord que $N_K(A) \subset K$ normalise A, donc $N_K(A)$ est bien dans le stabilisateur dans K du plat $f_0(\mathfrak{a})$. Démontrons l'inclusion inverse. Soit $g \in K$ tel que $gf_0(\mathfrak{a}) = f_0(\mathfrak{a})$. Ainsi, pour tout $v \in \mathfrak{a}$,

$$gf_0(v) = ge^v o \in f_0(\mathfrak{a}) = e^{\mathfrak{a}} o,$$

c'est-à-dire qu'il existe $u(v) \in \mathfrak{a}$ et $l(v) \in K$ tels que

$$ge^v = e^{u(v)} l(v).$$

Donc

$$ge^v l(v)^{-1} = e^{u(v)}. \tag{4.1}$$

De plus, $v \in \mathfrak{a} \mapsto u(v) \in \mathfrak{a}$ est continue puisque gf_0 est un plat paramétré.

En particulier comme $g \in K$, pour tout $v \in \mathfrak{a}^+$, le terme de gauche est une décomposition de Cartan du terme de droite $e^{u(v)} \in A$. D'où

$$\kappa(e^{u(v)}) = v.$$

Or pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$, l'action adjointe du groupe de Weyl $N_K(A)/M$ sur $Ad(N_K(A))v$ est simplement transitive. Donc il existe un unique élément du groupe de Weyl envoyant v sur $u(v)$.
Justifions que cet élément du groupe de Weyl ne dépend pas du choix de $v \in \mathfrak{a}^{++}$. Restreinte à l'ouvert connexe $\mathfrak{a}^{++}$, l'application $v \mapsto u(v)$ est à valeurs dans l'un des ouverts connexes disjoints $\{Ad(k_w)\mathfrak{a}^{++}\}_{w \in N_K(A)/M}$, puisqu'elle préserve la projection de Cartan. Il existe donc un unique élément du groupe de Weyl, envoyant $\mathfrak{a}^{++}$ sur $u(\mathfrak{a}^{++})$. Considérons un représentant $k \in N_K(A)$ de cet élément. Ainsi, pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$,

$$u(v) = Ad(k)v.$$

Par continuité, on en déduit que l'égalité précédente est encore vraie pour tout $v \in \mathfrak{a}^+$. En passant à l'exponentielle, on en déduit que pour tout $v \in \mathfrak{a}^+$,

$$e^{u(v)} = ke^v k^{-1}.$$

Enfin en combinant avec l'équation (4.1), on déduit que pour tout $v \in \mathfrak{a}^+$, il existe $l(v) \in K$ tel que

$$ge^v l(v)^{-1} = e^{u(v)} = ke^v k^{-1}.$$

D'où

$$ge^v = ke^v k^{-1} l(v).$$

Donc pour tout $v \in \mathfrak{a}^+$

$$gf_0(v) = kf_0(v).$$

En particulier, pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$, la suite $(e^{-nv}k^{-1}ge^{nv})_{n \geq 1}$ est bornée. D'où, de même que pour le point (i), on utilise la Proposition 2.17 (iv)

$$k^{-1}g \in K \cap MAN = M,$$

c'est-à-dire, comme $kM \subset N_K(A)$,

$$g \in N_K(A).$$

Pour le point (iv), remarquons d'abord qu'en appliquant le point (iii) et le fait que A est commutatif, $N_K(A)A \subset \mathrm{Stab}_G(f_0(\mathfrak{a}))$. Pour l'inclusion inverse, soit $g \in G$ tel que $gf_0(\mathfrak{a}) = f_0(\mathfrak{a})$. De même qu'au point précédent, il existe une application continue $v \in \mathfrak{a} \mapsto u(v) \in \mathfrak{a}$ telle que pour tout $v \in \mathfrak{a}$,

$$ge^v o = e^{u(v)} o.$$

En particulier,

$$e^{-u(v)} ge^v \in K.$$

Par $K-$invariance de la projection de Cartan, pour tout $v \in \mathfrak{a}$,

$$\kappa(ge^v) = \kappa(e^{u(v)}).$$

De plus, d'après le Lemme 2.51,

$$\kappa(ge^v) - \kappa(e^v) \in B(0, \|\kappa(g)\|).$$

Donc pour tout $v \in \mathfrak{a}$,

$$\kappa(e^{u(v)}) - \kappa(e^v) \in B(0, \|\kappa(g)\|).$$

Pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$ tel que $\mathrm{d}(v, \partial\mathfrak{a}^+) \geq 2\|\kappa(g)\|$,

$$\kappa(e^{u(v)}) \in \mathfrak{a}^{++}.$$

Par le même argument que précédemment, on en déduit qu'il existe $k \in N_K(A)$ tel que,

$$u(v) = Ad(k)\kappa(e^{u(v)}) = Ad(k)\kappa(ge^v).$$

C'est-à-dire

$$e^{u(v)} = ke^{\kappa(ge^v)}k^{-1}.$$

Donc pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$ tel que $\mathrm{d}(v, \partial\mathfrak{a}^+) \geq 2\|\kappa(g)\|$,

$$\begin{aligned} e^{-u(v)} ge^v &= ke^{-\kappa(ge^v)}k^{-1}ge^v \\ &= ke^{-\kappa(ge^v)+v}\ (e^{-v}k^{-1}ge^v). \end{aligned}$$

Le premier terme $ke^{-\kappa(ge^v)+v}$ est borné puisque $\kappa(ge^v)$ est dans un voisinage borné de $\kappa(e^v) = v$ lorsque $v \in \mathfrak{a}^{++}$. Le second terme $(e^{-nv}k^{-1}ge^{nv})_{n\geq 1}$ n'est borné que ssi $k^{-1}g \in MAN$, d'après la Proposition 2.17 (iv). Écrivons la décomposition d'Iwasawa de $k^{-1}g \in MAN$: il existe $(c, a, u) \in M \times A \times N$ tel que

$$k^{-1}g = cau.$$

D'une part

$$e^{-u(v)}ge^v = ke^{-\kappa(ge^v)}k^{-1}ge^v \in K.$$

D'autre part, (en utilisant que MA commute avec A)

$$\begin{aligned} ke^{-\kappa(ge^v)}k^{-1}ge^v &= ke^{-\kappa(ge^v)}caue^v \\ &= ke^{-\kappa(ge^v)}cae^v\ (e^{-v}ue^v) \\ &= kc\ (ae^{-\kappa(ge^v)+v})\ (e^{-v}ue^v). \end{aligned}$$

Le triplet

$$(kc, ae^{-\kappa(ge^v)+v}, e^{-v}ue^v) \in K \times A \times N$$

est donc la décomposition d'Iwasawa de $e^{-u(v)}ge^v \in K$. On en déduit que pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$ tel que $\mathrm{d}(v, \partial\mathfrak{a}^+) \geq 2\|\kappa(g)\|$,

$$e^{-v}ue^v = e_G.$$

D'où $u = e_G$ et $k^{-1}g \in MA$. Ainsi, on obtient le dernier point

$$g \in kMA \subset N_K(A)A.$$

$\square$

Remarquons maintenant que l'image $f_0(\mathfrak{a}^+)$ de la chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+$ est un domaine fondamental pour l'action du groupe de Weyl sur le plat maximal $f_0(\mathfrak{a})$. Considérons l'ensemble suivant, dit des *chambres de Weyl géométriques.*

$$G.f_0(\mathfrak{a}^+) := \{gf_0(\mathfrak{a}^+) \mid g \in G\}.$$

On en déduit que l'application suivante

$$\begin{aligned} G/M &\longrightarrow G.f_0(\mathfrak{a}^+) \\ gM &\longmapsto gf_0(\mathfrak{a}^+) \end{aligned}$$

est $G-$équivariante et bijective. Ainsi, à tout point de l'espace des chambres de Weyl G/M, on va pouvoir associer de manière unique une chambre de Weyl géométrique dans l'espace globalement symétrique G/K.

Définissons le flot directionnel des chambres de Weyl.

Définition 4.3. *Soit $\theta \in \mathfrak{a}^+$, le* flot des chambres de Weyl de direction θ*, noté ϕ_t^θ, agit sur l'espace des chambres de Weyl G/M par*

$$\phi_t^\theta(gM) := ge^{t\theta}M.$$

Le flot ϕ_t^θ est dit régulier *si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et* singulier *sinon.*

Remarque 4.4. *Du point de vue des plats paramétrés, ce flot se réécrit aussi : pour tout $f \in \mathcal{W}$,*

$$\phi_t^\theta(f) : v \longmapsto f(v + t\theta).$$

Considérons la projection de Cartan $\kappa : G \to \mathfrak{a}^+$ (cf. Définition 2.14). Nous utiliserons la fonction "distance"

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{a}^+} : G/K \times G/K &\longrightarrow \mathfrak{a}^+ \\ (go, g'o) &\longmapsto \kappa(g'^{-1}g). \end{aligned}$$

Cette fonction a été beaucoup étudiée par A. Parreau [Par18], voir aussi X. Thirion [Thi07, Def-Thm 8.38]. Elle est bien définie indépendemment des choix de g et g' dans G/K.

4.1.2 Chambres de Weyl asymptotiques, bord de Furstenberg

Cette sous-partie se base sur la thèse de X. Thirion [Thi07, Chapter 8, §8.D], le livre d'Y. Guivarch - L. Ji - J. Taylor [GJT98] et le livre d'Y. Benoist- J-F. Quint [BQ16b] ainsi que du travail commun avec O. Glorieux [DG18].

Définition 4.5. *Munissons l'ensemble des chambres de Weyl géométriques de la relation d'équivalence suivante*

$$f_1(\mathfrak{a}^+) \sim f_2(\mathfrak{a}^+) \Leftrightarrow \sup_{u \in \mathfrak{a}^{++}} \|d_{\mathfrak{a}^+}(f_1(u), f_2(u))\| < \infty.$$

De manière équivalente, $f_1(\mathfrak{a}^+) \sim f_2(\mathfrak{a}^+)$ si et seulement si pour tout $v \in \mathfrak{a}^{++}$, les géodésiques $t \mapsto f_1(tv)$ et $t \mapsto f_2(tv)$ sont à distance bornée lorsque $t \to +\infty$. Les classes d'équivalence pour cette relation sont les chambres de Weyl asymptotiques.

Rappelons que le bord de Furstenberg est définit par $\mathcal{F} := G/P$ où $P = MAN$ (on se réfèrera à la Définition 2.18). Notons $\eta_0 := P$ et $\check{\eta}_0 := k_\iota \eta_0 = MAN^-$.

Fait 4.6. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors l'ensemble des chambres de Weyl asymptotiques s'identifie avec le bord de Furstenberg $\mathcal{F}$ via l'application $G-$équivariante et bijective qui à $g\eta_0 \in \mathcal{F}$ associe la classe d'équivalence de la chambre de Weyl géométrique $gf_0(\mathfrak{a}^+)$.

Preuve . Comme G agit transitivement sur l'ensemble $Gf_0(\mathfrak{a}^+)$ des chambres de Weyl géométriques, il agit a fortiori de manière transitive sur l'ensemble des chambres de Weyl asymptotiques. L'application qui à $g\eta_0 \in \mathcal{F}$ associe la classe d'équivalence de la chambre de Weyl géométrique $gf_0(\mathfrak{a}^+)$ est donc naturellement équivariante.

Démontrons que P est le stabilisateur de la classe d'équivalence de $f_0(\mathfrak{a}^+)$. Cela permettra d'identifier l'ensemble des chambres de Weyl asymptotiques au bord de Furstenberg $\mathcal{F}$. Pour tout $g \in G$ et $u \in \mathfrak{a}^{++}$, on calcule la distance

$$d(gf_0(u), f_0(u)) = \|d_{\mathfrak{a}^+}(gf_0(u), f_0(u))\| = \|\kappa(e^{-u}ge^u)\|.$$

D'après la Proposition 2.17 (iv), la suite $(e^{-nu}ge^{nu})_{n\geq 1}$ est bornée pour tout $u \in \mathfrak{a}^{++}$ ssi $g \in MAN$. Par conséquent, la famille de distances $\{d(gf_0(u), f_0(u))\}_{u\in\mathfrak{a}^{++}}$ est bornée ssi $g \in MAN = P$. □

Définition 4.7. *Pour toute paire de points $x, y \in G/K$, tout point $\eta \in \mathcal{F}$, pour tout $u \in \mathfrak{a}^{++}$, le cocycle de* Busemann *est défini par*

$$\beta_{\eta,u}(x, y) = \lim_{t\to+\infty} d_{\mathfrak{a}^+}(g_\eta f_0(tu), y) - d_{\mathfrak{a}^+}(g_\eta f_0(tu), x),$$

où $g_\eta \in G$ est tel que $g_\eta\eta_0 = \eta$.

Rappelons que le cocycle d'Iwasawa est l'application

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{F} &\longrightarrow \mathfrak{a} \\ (g, \eta) &\longmapsto \sigma(g, \eta) \end{aligned}$$

définie pour tout $g \in G$ et $\eta := k_\eta\eta_0 \in \mathcal{F}$, avec $k_\eta \in K$, par

$$gk_\eta \in K \exp(\sigma(g, \eta))N.$$

D'après le [BQ16b, Corollaire 5.34], le cocycle de Busemann coincide avec le cocycle d'Iwasawa dans le sens où pour tout $g \in G$ et $\eta \in \mathcal{F}$ et $u \in \mathfrak{a}^{++}$,

$$\beta_{\eta,u}(o, g^{-1}o) = \sigma(g, \eta). \tag{4.2}$$

Ainsi, le cocycle de Busemann ne dépend ni du choix de $g_\eta \in G$, ni du choix de $u \in \mathfrak{a}^{++}$. On le notera donc $\beta_\eta(x, y)$.

Faisons apparaître, dans la décomposition de Jordan d'un élément loxodromique, un flot directionnel des chambres de Weyl. Rappelons que pour tout élément $g \in G^{lox}$, pour tout $h_g \in G$ diagonalisant la partie hyperbolique de g, il existe un élément $m(g) \in M$ tel que

$$g = h_g e^{\lambda(g)} m(g) h_g^{-1}.$$

Par conséquent,

$$gh_g = h_g e^{\lambda(g)} m(g),$$

c'est-à-dire, modulo M,

$$\begin{aligned} gh_gM &= h_g e^{\lambda(g)} M \\ &= \phi_1^{\lambda(g)}(h_gM). \end{aligned}$$

On retrouve donc bien le Fait 2.54, que pour tout élément loxodromique $g \in G^{lox}$,

$$\beta_{g^+}(g^{-1}o, o) = \sigma(g, g^+) = \lambda(g).$$

4.1.3 Paramétrisation de Hopf

Rappelons que

$$\mathcal{F}^{(2)} := \{(g\eta_0, g\check{\eta}_0) \mid g \in G\}$$

est l'ensemble des points en position générale. D'après la Proposition 2.22, l'application $G-$équivariante

$$\begin{aligned} G/AM &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)} \\ gAM &\longmapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Pour tout plat paramétré $f \in \mathcal{W}$, si $g_f \in G$ est tel que $f = g_f f_0$, la classe asymptotique de la chambre de Weyl géométrique $f(\mathfrak{a}^+)$ (resp. $f(-\mathfrak{a}^+)$ et $f(Ad(k_w)\mathfrak{a}^+)$ où $w \in N_K(A)/M$) correspond au point du bord de Furstenberg $g_f\eta_0$ (resp. $g_f\check{\eta}_0$ et $g_f k_w \eta_0$ où $w \in N_K(A)/M$).

Procédons par analogie aux coordonnées de Hopf en rang 1, à un plat paramétré $f \in \mathcal{W}$, on va associer le point $g_f\eta_0$ correspondant à la classe asymptotique de la chambre $f(\mathfrak{a}^+)$, son point opposé $g_f\check{\eta}_0$ et une troisième coordonnée dans $\mathfrak{a}$ donnée par le cocycle de Busemann $\beta_{g_f\eta_0}(o, f(0))$.

Définissons maintenant la paramétrisation de Hopf.

Définition 4.8. *L'application suivante*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : G/M &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a} \\ gM &\longmapsto \Big(g\eta_0, g\check{\eta}_0; \sigma(g, \eta_0)\Big). \end{aligned}$$

est la paramétrisation de Hopf *de l'espace des chambres de Weyl.*

L'action de G à gauche sur G/M se lit dans le système de coordonnées de Hopf $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$ de la manière suivante. Pour tout $g \in G$ et $(\xi, \eta; v) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$,

$$g.(\xi, \eta; v) = (g.\xi, g.\eta; \sigma(g, \xi) + v).$$

Comme A et M commutent, l'action de A par multiplication à droite sur G induit l'action de A par multiplication à droite sur G/M. Celle-ci s'écrit dans ce système de coordonnées de la manière suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$ et $(\xi, \eta; v) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$

$$\phi_1^\alpha \cdot (\xi, \eta; v) = (\xi, \eta; v + \alpha).$$

De même, pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^+$ et $(\xi, \eta; v) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$, l'action sur G/M du flot des chambres de Weyl de direction θ se lit par

$$\phi_t^\theta \cdot (\xi, \eta; v) = (\xi, \eta; v + t\theta).$$

Proposition 4.9 (Proposition 8.54 [Thi07])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors les coordonnées de Hopf sont des coordonnées $(G, \mathfrak{a})-$équivariantes et continues dans le sens où :

(i) L'action par multiplication à gauche de G sur G/M se lit dans la paramétrisation de Hopf, par l'action dite à gauche de G sur le produit $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$;

(ii) L'action par multiplication à droite de $\mathfrak{a}$ sur G/M se lit dans la paramétrisation de Hopf, par l'action par translation à droite de $\mathfrak{a}$ sur le produit $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$.

De plus, pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $gM \in G/M$, alors

$$\mathcal{H}(\phi_t^\theta(gM)) = \phi_t^\theta(\mathcal{H}(gM)).$$

4.2 Coordonnées globales d'Iwasawa-Hopf de G

On rappelle que d'après le Théorème 2.15 de décomposition d'Iwasawa, $G = KAN$, et les applications

$$\begin{aligned} K \times A \times N &\longrightarrow G \\ (k, a, n) &\longmapsto kan \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K/M &\longrightarrow \mathcal{F} \\ kM &\longmapsto k\eta_0 \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes.

Définition 4.10. *Pour tout $g \in G$, on note $k_I(g) \in K$, la coordonnée dans K de la décomposition d'Iwasawa de g.*

4.2.1 Action de G sur K

Le groupe G agit par multiplication à gauche sur G donc sur G/AN. La décomposition d'Iwasawa $G \simeq K \times A \times N$ permet d'identifier G/AN à K et de voir cette action de G sur G/AN comme une action de G sur K. Par conséquent, si on restreint l'action de G sur K à gauche au sous-groupe compact K, alors on retrouve l'action par multiplication à gauche de K sur lui-même.

Proposition 4.11. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors l'application

$$\begin{aligned} G \times K &\longrightarrow K \\ (g, k) &\longmapsto k_I(gk) \end{aligned}$$

définit une action de G sur K.

Preuve. Il suffit de démontrer que pour tout $g_1, g_2 \in G$,

$$k_I(g_2 g_1) = k_I\big(g_2 k_I(g_1)\big).$$

Remarquons que pour tout $g \in G$,

$$k_I(gAN) = k_I(g).$$

D'où pour tout $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} k_I(g_2 g_1) &= k_I\big(g_2\ (g_1 AN)\big) \\ &= k_I\big(g_2\ k_I(g_1) AN\big) \\ &= k_I\big(g_2\ k_I(g_1)\big). \end{aligned}$$

$\square$

Fait 4.12. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $g \in G$ et tout $m \in M$

$$k_I(gm) = k_I(g)m.$$

Preuve : Par décomposition d'Iwasawa, pour tout $g \in G$,

$$g \in k_I(g)AN.$$

Donc pour tout $m \in M$,

$$gm \in k_I(g)ANm = k_I(g)m(m^{-1}ANm).$$

Comme M normalise AN, on déduit que $m^{-1}ANm = AN$, d'où

$$gm \in k_I(g)mAN.$$

Enfin, $k_I(gm) = k_I(g)m$. □

4.2.2 Coordonnées d'Iwasawa de G/A

Grâce à l'action de G sur K définie précédemment, on va relever les coordonnées de Hopf de $G/M \simeq \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$ dans un sous-ensemble de $K \times \mathcal{F} \times \mathfrak{a}$.

Définition 4.13. *Considérons l'application $G-$équivariante*

$$\begin{aligned} K \times \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{F} \\ (k, \xi) &\longmapsto (k\eta_0, \xi), \end{aligned}$$

et notons $\mathcal{F}_G^{(2)}$ l'image réciproque de $\mathcal{F}^{(2)}$ par cette application. Les éléments de $\mathcal{F}_G^{(2)}$ sont appelés les paires transverses *de $K \times \mathcal{F}$.*

Rappelons d'après le Corollaire 2.20 de la décomposition de Bruhat, que l'application

$$\begin{aligned} N^- &\longrightarrow N^-\eta_0 \\ n_- &\longmapsto n_-\eta_0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme, son image est une sous-variété ouverte de $\mathcal{F} \simeq K/M$ dont le complémentaire est une union finie de sous-variétés disjointes de dimensions inférieures. Il en est de même pour l'application

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow N\check{\eta}_0 \\ u &\longmapsto u\check{\eta}_0. \end{aligned}$$

Proposition 4.14. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact.*

Alors

(i) pour tous $(k, \xi) \in K \times \mathcal{F}$, en notant $\check{k}_\xi \in K$ un élément tel que $\check{k}_\xi\check{\eta}_0 = \xi$, on a

$$\begin{aligned} (k, \xi) \in \mathcal{F}_G^{(2)} &\iff \check{k}_\xi^{-1}k \in N^-MAN \\ &\iff k^{-1}\xi \in N\check{\eta}_0. \end{aligned}$$

(ii) pour tout $\xi \in \mathcal{F}$, en notant $\check{k}_\xi \in K$ un élément tel que $\check{k}_\xi\check{\eta}_0 = \xi$, l'ensemble des éléments de K transverses à ξ est $\check{k}_\xi N^-MAN \cap K$.

De plus, l'application $G-$équivariante

$$\begin{aligned} G/A &\longrightarrow \mathcal{F}_G^{(2)} \\ gA &\longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Preuve . Pour le point (i), on remarque que la paire $(k, \check{k}_\xi \check{\eta}_0) \in \mathcal{F}_G^{(2)}$ est transverse si et seulement si $(k\eta_0, \check{k}_\xi \check{\eta}_0) \in \mathcal{F}^{(2)}$. Or d'après la Proposition 2.22,

$$(k\eta_0, \xi) \in \mathcal{F}^{(2)} \Longleftrightarrow \check{k}_\xi^{-1} k \in N^- MAN.$$

De plus, en passant à l'inverse $k^{-1}\check{k}_\xi \in NAMN^-$, d'où

$$\begin{aligned} k^{-1}\check{k}_\xi \check{\eta}_0 &\in (NAMN^-).\check{\eta}_0, \\ k^{-1}\xi &\in N(AMN^- \check{\eta}_0) = N\check{\eta}_0. \end{aligned}$$

D'où l'équivalence.

Le point (ii) découle du point (i) puisque $\check{k}_\xi(N^- MAN \cap K, \check{\eta}_0) \subset \mathcal{F}_G^{(2)}$.

Prouvons d'abord que G agit transitivement sur $\mathcal{F}_G^{(2)}$. Soit $(k_1, \xi_1) \in \mathcal{F}_G^{(2)}$. Prouvons qu'il existe $h_1 \in G$ tel que

$$h_1(e_G, \check{\eta}_0) = (k_1, \xi_1).$$

Alors $(k_1\eta_0, \xi_1)$ est dans $\mathcal{F}^{(2)}$. Comme l'action de G sur $\mathcal{F}^{(2)}$ est transitive, il existe $h_1 \in G$ tel que

$$h_1(\eta_0, \check{\eta}_0) = (k_1\eta_0, \xi_1).$$

Or

$$\begin{aligned} h_1(e_G, \check{\eta}_0) &= (k_I(h_1), h_1\check{\eta}_0) \\ &= (k_I(h_1), \xi_1). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $c \in M$, en utilisant $\mathrm{Stab}(\check{\eta}_0) = MAN^-$,

$$\begin{aligned} h_1 c(e_G, \check{\eta}_0) &= (k_I(h_1 c), h_1 c\check{\eta}_0) \\ &= (k_I(h_1 c), h_1\check{\eta}_0) \\ &= (k_I(h_1 c), \xi_1). \end{aligned}$$

D'après le Fait 4.12, $k_I(h_1 c) = k_I(h_1)c$. Soit $c_1 \in M$ tel que $k_I(h_1)c_1 = k_1$, alors l'élément $h_1' = h_1 c_1$ vérifie

$$h_1'(e_G, \check{\eta}_0) = (k_1, \xi_1),$$

et l'action de G sur $\mathcal{F}_G^{(2)}$ est transitive.

Remarquons maintenant que

$$\mathrm{Stab}(e_G, \check{\eta}_0) = AN \cap MAN^- = A.$$

On en déduit que l'application $G/A \to \mathcal{F}_G^{(2)}$ est bijective.

Comme la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ est un difféomorphisme, l'application $g \mapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0)$ est bien différentiable.

Prouvons que $gA \mapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0)$ est un difféomorphisme local en A. L'application

$$N \longrightarrow N\check{\eta}_0$$

est un difféomorphisme, donc $\mathfrak{n}$ est isomorphe à $T_{\check{\eta}_0}(G/P)$. La différentielle en l'identité de

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{F} \\ g &\longmapsto g\check{\eta}_0 \end{aligned}$$

est surjective de $\mathfrak{g}$ dans $T_{\check{\eta}_0}(G/P) \simeq \mathfrak{n}$. Par décomposition d'Iwasawa de l'algèbre de Lie,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

on déduit que la différentielle en e_G de

$$g \mapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0)$$

est surjective de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{k} \times T_{\check{\eta}_0}(G/P) \simeq \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$, de noyau $\mathfrak{a}$. Ainsi, la différentielle en A de

$$gA \longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0)$$

est un isomorphisme, c'est donc un difféomorphisme local en A.

Comme l'action de G sur G/A est transitive et l'application est $G-$équivariante, on en déduit que

$$gA \longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0)$$

est un difféomorphisme local en tout point. Enfin par bijectivité de cette application, c'est bien un difféomorphisme global. □

La Proposition précédente permet de définir des coordonnées de G/A.

Définition 4.15. *On définit les coordonnées* d'Iwasawa *de G/A grâce au difféomorphisme $G-$équivariant*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^{(2)} : G/A &\longrightarrow \mathcal{F}_G^{(2)} \\ gA &\longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0). \end{aligned}$$

Remarquons que la projection

$$gA \in G/A \longmapsto gAM \in G/AM$$

se lit en coordonnées grâce à l'application $G-$équivariante

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_G^{(2)} &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)} \\ (k, \xi) &\longmapsto (k\eta_0, \xi). \end{aligned}$$

On en déduit que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G/A \arrow[r, "\mathcal{H}_G^{(2)}"] \arrow[d] & \mathcal{F}_G^{(2)} \arrow[d] \\ G/AM \arrow[r, "\mathcal{H}^{(2)}"] & \mathcal{F}^{(2)} \end{tikzcd}$$

est commutatif et $G-$équivariant. Dans ce diagramme, l'action par multiplication à gauche de G sur G/A se lit de manière suivante : pour tout $g \in G$ et $(k, \xi) \in \mathcal{F}_G^{(2)}$

$$g.(k, \xi) = (k_I(gk), g\xi).$$

4.2.3 Coordonnées d'Iwasawa-Hopf

Proposition 4.16. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a} \\ g &\longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0 \; ; \; \sigma(g, \eta_0)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Preuve : Le stabilisateur dans G du point $(e_G, \check{\eta}_0 \; ; \; 0)$ est inclus dans le stabilisateur de la paire transverse $(e_G, \check{\eta}_0)$, qui vérifie

$$\mathrm{Stab}_G(e_G, \check{\eta}_0) = A.$$

De plus, pour tout $v \in \mathfrak{a}$,

$$\sigma(e^v, \eta_0) = v,$$

d'où

$$\mathrm{Stab}(e_G, \check{\eta}_0, 0) = e_G.$$

Prouvons maintenant que l'action de G sur $\mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$ est transitive.
Soit $(k, \xi \; ; \; v) \in \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$. Comme l'action de G sur $\mathcal{F}_G^{(2)}$ est transitive, il existe $h \in G$ tel que

$$h(e_G, \check{\eta}_0) = (k, \xi).$$

De plus, $\mathcal{F}_G^{(2)}$ s'identifie à G/A, donc pour tout $u \in \mathfrak{a}$,

$$he^u(e_G, \check{\eta}_0) = (k, \xi).$$

Or par la relation de cocycle,

$$\begin{aligned} \sigma(he^u, \eta_0) &= \sigma(h, e^u\eta_0) + \sigma(e^u, \eta_0) \\ &= \sigma(h, \eta_0) + u. \end{aligned}$$

En posant $g = he^{v - \sigma(h, \eta_0)}$, on déduit d'une part que

$$g(e_G, \check{\eta}_0 \; ; \; v) = (k, \xi \; ; \; \sigma(g, \eta_0)).$$

D'autre part,

$$\sigma(g, \eta_0) = \sigma(he^{v - \sigma(h, \eta_0)}, \eta_0) = v.$$

D'où l'action de G sur $\mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$ est simplement transitive et l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a} \\ g &\longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0 \; ; \; \sigma(g, \eta_0)) \end{aligned}$$

est bijective.

De plus, cette application est différentiable, puisque la projection de chaque coordonnée l'est. Il suffit de démontrer que c'est un difféomorphisme local en e_G. D'après la Proposition 4.14, l'application

$$gA \longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0)$$

est un difféomorphisme. En particulier, sa différentielle en e_G est surjective de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{k} \times T_{\check{\eta}_0}\mathcal{F} \simeq \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}$. Comme

$$e^v \longmapsto \sigma(e^v, \eta_0) = v,$$

la différentielle en e_G du cocycle d'Iwasawa en η_0, restreinte à $\mathfrak{a}$ est surjective, donc c'est un isomorphisme par raison de dimensions. Par décomposition d'Iwasawa,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

on en déduit que $g \mapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0\ ;\ \sigma(g, \eta_0))$ est un difféomorphisme local en e_G. Par $G-$équivariance, cette application est un difféomorphisme local en tout point.

Comme dit plus haut, elle est bijective, c'est donc un difféomorphisme global. □

Définissons maintenant les coordonnées de Hopf généralisées sur G.

Définition 4.17. *On définit l'application de Hopf généralisée par*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G : G &\longrightarrow \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a} \\ g &\longmapsto (k_I(g), g\check{\eta}_0\ ;\ \sigma(g, \eta_0)). \end{aligned}$$

On parlera de coordonnées d'Iwasawa-Hopf *de G.*

Remarquons que pour tout $g \in G$,

$$(k_I(g)\eta_0, g\check{\eta}_0\ ;\ \sigma(g, \eta_0)) = \mathcal{H}(gM).$$

L'action par multiplication à gauche de G sur lui-même se lit sur le système de coordonnées $\mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$ de la manière suivante : pour tout $g \in G$ et $(k, \eta\ ;\ v) \in \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$,

$$g.(k, \eta\ ;\ v) = (k_I(gk), g.\eta\ ;\ \sigma(g, k\eta_0) + v).$$

L'action par multiplication à droite de A sur G se lit sur le système de coordonnées $\mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$ de la manière suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$ et $(k, \eta\ ;\ v) \in \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$

$$\phi_1^\alpha(k, \eta\ ;\ v) = (k, \eta\ ;\ v + \alpha).$$

De même, pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^+$, l'action sur G du flot des chambres de Weyl de direction θ se lit dans ces coordonnées de la manière suivante : pour tout $(k, \eta\ ;\ v) \in \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$,

$$\phi_t^\theta(k, \eta\ ;\ v) = (k, \eta\ ;\ v + t\theta).$$

La projection $(G, \mathfrak{a})-$équivariante

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G/M \\ g &\longmapsto gM \end{aligned}$$

se lit dans ces coordonnées par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a} &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a} \\ (k, \xi\ ;\ v) &\longmapsto (k\eta_0, \xi\ ;\ v). \end{aligned}$$

On en déduit la Proposition suivante.

Proposition 4.18. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathcal{H}_G"] \arrow[d] & \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a} \arrow[d] \\ G/M \arrow[r, "\mathcal{H}"] & \mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

est commutatif et $(G, \mathfrak{a})-$équivariant.

4.3 Coordonnées de Bruhat-Hopf sur G

Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.

Grâce à la décomposition de Bruhat, on va définir une famille de sections du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$. On va ensuite définir un système de coordonnées locales du sous-groupe compact K, à valeurs dans $\mathcal{F} \times M$. En lisant l'action de G à gauche sur K dans ce système de coordonnées, on fait apparaître une famille de d'applications, dépendant des cartes choisies, à valeurs dans M. Puisque ces applications traduisent une action de groupe, elles vérifient une relation de cocycle.

En réécrivant la première coordonnée dans K des coordonnées globales d'Iwasawa-Hopf de G

$$G \longrightarrow \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a} \subset K \times \mathcal{F} \times \mathfrak{a},$$

en coordonnées locales à valeurs dans $\mathcal{F} \times M$, on munit G d'un système de coordonnées locales, les coordonnées locales de Bruhat-Hopf. De la même manière, la lecture de l'action à gauche de G sur ces coordonnées locales fait apparaître une famille d'applications, dépendant des cartes, à valeurs dans $\mathfrak{a} \times M$.

4.3.1 Sections de Bruhat du bord de Furstenberg

Rappelons la décomposition de Bruhat (Théorème 2.16). On note $W := N_K(A)/Z_K(A)$ le groupe de Weyl de G. On choisit pour chaque élément $w \in W$ un représentant $k_w \in N_K(A)$. Alors

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B k_w B$$

où $B = MAN$. On considère k_ι un représentant dans K de l'involution telle que

$$Ad(k_\iota)(\mathfrak{a}^+) = -\mathfrak{a}^+.$$

Rappelons alors que $N^- = k_\iota N k_\iota^{-1}$. De plus, d'après le Corollaire 2.20, l'application

$$\begin{aligned} N^- &\longrightarrow N^-\eta_0 \\ n_- &\longmapsto n_-\eta_0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme, son image est une sous-variété ouverte de $\mathcal{F}$, le complémentaire de son image est une union finie de sous-variétés disjointes de dimensions inférieures. Commençons par définir une famille de sections naturelles du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$ en prenant le difféomorphisme inverse du Corollaire 2.20.

Définition 4.19. *La* section de Bruhat centrée en η_0 *est l'application différentiable*

$$\mathfrak{S}_0 : N^-\eta_0 \longrightarrow K$$

qui à tout élément $n_-\eta_0 \in N^-\eta_0$ associe l'élément $k_I(n_-) \in K$.

Pour tout $c \in K$, notons $\mathcal{F}_c := cN^-\eta_0$.

Pour tout élément $c \in K$, on définit la section de Bruhat centrée en $c\eta_0$

$$\mathfrak{S}_c : \mathcal{F}_c \longrightarrow K$$

en posant pour tout $\xi \in \mathcal{F}_c$,

$$\mathfrak{S}_c(\xi) = c\mathfrak{S}_0(c^{-1}\xi).$$

Les domaines de définition des sections de Bruhat seront appelés les ouverts de Bruhat.

Fait 4.20. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $c \in K$, l'application $\mathfrak{S}_c : \mathcal{F}_c \to K$ est une section du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$.

Preuve : Soit $g \in G$, par décomposition d'Iwasawa,

$$g \in k_I(g)AN.$$

Donc comme $\eta_0 = MAN$,

$$g\eta_0 = k_I(g)\eta_0.$$

En particulier, pour tout $\xi \in \mathcal{F}_{e_G} = N^-\eta_0$, il existe un unique élément $n_\xi \in N^-$ tel que

$$\xi = n_\xi \eta_0.$$

Or

$$\mathfrak{S}_0(\xi) := k_I(n_\xi),$$

d'où

$$\mathfrak{S}_0(\xi)\eta_0 = k_I(n_\xi)\eta_0 = n_\xi\eta_0 = \xi.$$

Enfin, comme pour tout $c \in K$ et tout $\xi \in \mathcal{F}_{e_G}$,

$$\mathfrak{S}_c(c\xi) = c\mathfrak{S}_{e_K}(\xi),$$

on en déduit que pour tout $c \in K$, l'application $\mathfrak{S}_c$ est bien une section du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$. □

La famille des sections de Bruhat est paramétrée par les éléments de K. Elles sont différentiables par les propriétés des décompositions de Bruhat et d'Iwasawa. On déduit le fait suivant.

Fait 4.21. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Pour tous $c, c' \in K$, pour tout $\xi \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$, alors*

$$\mathfrak{S}_c(\xi)^{-1}\mathfrak{S}_{c'}(\xi) \in M.$$

Preuve : Cela découle du fait que $\mathfrak{S}_c$ et $\mathfrak{S}_{c'}$ sont des sections du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$, définies localement sur l'ouvert $\mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$. □

Définition 4.22. *Pour tous $c, c' \in K$, on définit l'application $m_{c,c'}$ par*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'} &\longrightarrow M \\ \xi &\longmapsto m_{c,c'}(\xi) := \mathfrak{S}_c(\xi)^{-1}\mathfrak{S}_{c'}(\xi). \end{aligned}$$

i.e. de sorte que pour tout $\xi \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$,

$$\mathfrak{S}_{c'}(\xi) = \mathfrak{S}_c(\xi)m_{c,c'}(\xi). \tag{4.3}$$

Les sections de Bruhat étant des applications différentiables, il en est de même pour les applications $m_{c,c'}$.

Proposition 4.23. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Pour tous $c, c' \in K$, alors*

(i) l'application $m_{c,c'} : \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'} \to M$ est différentiable,

(ii) pour tout $\xi \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$,

$$m_{c,c'}^{-1}(\xi) = m_{c',c}(\xi),$$

(iii) si $c^{-1}c' \in M$ *alors pour tout* $\xi \in \mathcal{F}_c = \mathcal{F}_{c'}$

$$m_{c,c'}(\xi) = c^{-1}c',$$

(iv) pour tous $c_0, c_1, c_2 \in K$, *pour tout* $\xi \in \mathcal{F}_{c_0} \cap \mathcal{F}_{c_1} \cap \mathcal{F}_{c_2}$,

$$m_{c_2,c_0}(\xi) = m_{c_2,c_1}(\xi) m_{c_1,c_0}(\xi).$$

Démonstration : Prouvons le premier point. Par définition des sections de Bruhat, les applications $m_{c,c'}$ sont différentiables sur leur domaine de définition.

Pour le point (ii), on écrit d'une part pour tout $\xi \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$,

$$\mathfrak{S}_{c'}(\xi) = \mathfrak{S}_c(\xi) m_{c,c'}(\xi).$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{c'}(\xi) m_{c,c'}(\xi)^{-1} = \mathfrak{S}_c(\xi).$$

Or

$$\mathfrak{S}_c(\xi) = \mathfrak{S}_{c'}(\xi) m_{c',c}(\xi).$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{c'}(\xi) m_{c,c'}(\xi)^{-1} = \mathfrak{S}_{c'}(\xi) m_{c',c}(\xi),$$

et on conclut que $m_{c,c'}^{-1} = m_{c',c}$.

Pour le point (iii), remarquons que si $c^{-1}c' \in M$, alors les cartes de Bruhat $\mathcal{F}_c$ et $\mathcal{F}_{c'}$ coïncident. Posons $m_1 := c^{-1}c'$, de sorte que

$$c' = cm_1.$$

Prouvons que pour tout $\xi \in \mathcal{F}_c$, alors

$$m_{c,c'}(\xi) = m_1.$$

Soit $\xi \in \mathcal{F}_c = cN^-\eta_0$, il existe $n_- \in N^-$ tel que

$$\xi = cn_-\eta_0.$$

Par définition de la section de Bruhat $\mathfrak{S}_c$,

$$\mathfrak{S}_c(\xi) = ck_I(n_-).$$

Or $M \subset \mathrm{Stab}_G(\eta_0)$, donc

$$\xi = cm_1(m_1^{-1}n_-m_1)\eta_0.$$

De plus, d'après la Proposition 2.17, M normalise N^-, donc

$$m_1^{-1}n_-m_1 \in N^-.$$

D'où d'une part,

$$\xi = c'(m_1^{-1}n_-m_1)\eta_0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{c'}(\xi) &= c'k_I(m_1^{-1}n_-m_1)\\ &= cm_1k_I(m_1^{-1}n_-m_1)\end{aligned}$$

Rappelons que l'action de G sur K est définie par $(g,k) \mapsto k_I(gk)$. En restriction à K, on déduit que pour tout $k' \in K$, $(k',k) \mapsto k'k = k_I(k'k)$. En particulier comme M est un sous-groupe de K,

$$m_1k_I(m_1^{-1}n_-m_1) = k_I(m_1m_1^{-1}n_-m_1) = k_I(n_-m_1).$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{c'}(\xi) = ck_I(n_-m_1).$$

Par définition de la décomposition d'Iwasawa,

$$n_- \in k_I(n_-)AN.$$

D'où

$$n_-m_1 \in k_I(n_-)ANm_1 = k_I(n_-)m_1(m_1^{-1}ANm_1).$$

Or M normalise N^-, donc $m_1^{-1}ANm_1 = AN$ et

$$n_-m_1 \in k_I(n_-)m_1AN,$$

et par unicité de la décomposition d'Iwasawa,

$$k_I(n_-m_1) = k_I(n_-)m_1.$$

Enfin, on en déduit que pour tout $\xi \in \mathcal{F}_c$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{c'}(\xi) &= ck_I(n_-)m_1\\ &= \mathfrak{S}_c(\xi)m_1.\end{aligned}$$

D'où le point (iii)

$$m_{c,c'}(\xi) = m_1.$$

Pour le dernier point, soient $c_0, c_1, c_2 \in K$, alors pour tout $\xi \in \mathcal{F}_{c_0} \cap \mathcal{F}_{c_1} \cap \mathcal{F}_{c_2}$, d'une part

$$\mathfrak{S}_{c_0}(\xi) = \mathfrak{S}_{c_2}(\xi)m_{c_2,c_0}(\xi).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{c_0}(\xi) &= \mathfrak{S}_{c_1}(\xi)m_{c_1,c_0}(\xi)\\ &= \mathfrak{S}_{c_2}(\xi)m_{c_2,c_1}(\xi)m_{c_1,c_0}(\xi).\end{aligned}$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{c_2}(\xi)m_{c_2,c_0}(\xi) = \mathfrak{S}_{c_2}(\xi)m_{c_2,c_1}(\xi)m_{c_1,c_0}(\xi),$$

et

$$m_{c_2,c_0}(\xi) = m_{c_2,c_1}(\xi)m_{c_1,c_0}(\xi).$$

□

4.3.2 Cartes de Bruhat de K et cocycle à valeurs dans M

Cartes locales Pour tout $c \in K$, par décomposition de Bruhat, $cN^-MAN \cap K$ est un ouvert et son complémentaire est une union de sous-variétés fermées de dimensions inférieures de K. Notons

$$K_c := cN^-MAN \cap K.$$

C'est l'*ouvert de Bruhat de K centré en c.*

Remarquons que puisque $\mathcal{F}_c := cN^-\eta_0 = K_c\eta_0$, l'application

$$\begin{aligned} K_c &\longrightarrow \mathcal{F}_c \\ k &\longmapsto k\eta_0 \end{aligned}$$

est surjective.

Fait 4.24. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Pour tout $c \in K$ et pour tout $k \in K_c = cN^-MAN \cap K$, alors

$$\mathfrak{S}_c(k\eta_0)^{-1}k \in M.$$

En particulier, pour tout $g \in G$ et pour tout $c \in K$ tel que $g\eta_0 \in \mathcal{F}_c$,

$$\mathfrak{S}_c(g\eta_0)^{-1}k_I(g) \in M.$$

Preuve : D'après le Fait 4.20, l'application $\mathfrak{S}_c$ est une section locale $\mathcal{F}_c \overset{M}{\to} K_c$. On en déduit que pour tout $\eta \in \mathcal{F}_c$,

$$\mathfrak{S}_c(\eta)\eta_0 = \eta.$$

En particulier, pour tout $k \in K_c$, comme $k\eta_0 \in \mathcal{F}_c$, on déduit

$$\mathfrak{S}_c(k\eta_0)\eta_0 = k\eta_0.$$

Donc

$$\mathfrak{S}_c(k\eta_0)^{-1}k \in MAN \cap K = M.$$

Pour le second point, remarquons que pour tout $g \in G$, puisque $g \in k_I(g)AN$,

$$g\eta_0 = k_I(g)\eta_0.$$

Donc

$$\mathfrak{S}_c(g\eta_0)^{-1}k_I(g) = \mathfrak{S}_c(k_I(g)\eta_0)^{-1}k_I(g) \in M.$$

□

Grâce à la Proposition suivante, on va pouvoir munir chaque ouvert K_c de K, où $c \in K$, de coordonnées dans $\mathcal{F}_c \times M$.

Proposition 4.25. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $c \in K$, l'application

$$\begin{aligned} K_c &\longrightarrow \mathcal{F}_c \times M \\ k &\longmapsto (k\eta_0\ ;\ \mathfrak{S}_c(k\eta_0)^{-1}k)_c \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Preuve : Démontrons d'abord l'énoncé pour la carte K_{e_K}. Comme $K_c = cK_{e_K}$ pour tout $c \in K$, cela suffit pour démontrer l'énoncé en toute généralité. L'application

$$k \longmapsto (k\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_{e_K}(k\eta_0)^{-1}k)_{e_K}$$

est bien différentiable.

Montrons que cette application est injective. Soient $k, k' \in K_{e_K}$ ayant la même image, i.e.

$$(k\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_{e_K}(k\eta_0)^{-1}k)_{e_G} = (k'\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_{e_K}(k'\eta_0)^{-1}k')_{e_K}.$$

Comme $k\eta_0 = k'\eta_0$, on en déduit

$$\mathfrak{S}_{e_K}(k\eta_0) = \mathfrak{S}_{e_K}(k'\eta_0).$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{e_K}(k\eta_0)^{-1}k = \mathfrak{S}_{e_K}(k\eta_0)^{-1}k',$$

c'est-à-dire $k = k'$ et l'injectivité.

Montrons que cette application est surjective. Soit $(\xi \ ; \ m) \in \mathcal{F}_{e_K} \times M$. Alors l'image de $\mathfrak{S}_{e_K}(\xi)m$ par l'application est précisément

$$\big(\mathfrak{S}_{e_K}(\xi)m\eta_0 \ ; \ m\big)_{e_K}.$$

Or $m \in M \subset MAN$ et $\mathfrak{S}_{e_K}$ est une section du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$ donc

$$\big(\mathfrak{S}_{e_K}(\xi)m\eta_0 \ ; \ m\big)_{e_K} = \big(\xi \ ; \ m\big)_{e_K},$$

d'où la surjectivité.

Prouvons maintenant que l'application $K_{e_K} \to \mathcal{F}_{e_K} \times M$ est un difféomorphisme local en tout point. D'après le Corollaire 2.20, la différentielle en $k \in K$ de

$$\begin{aligned} K_{e_K} &\longrightarrow \mathcal{F}_{e_K} \\ k' &\longmapsto k'\eta_0 \end{aligned}$$

est surjective de T_kK dans $T_{k\eta_0}\mathcal{F}$. D'après le Fait 2.19, $\mathcal{F}$ est difféomorphe à K/M, donc le noyau de la différentielle de cette application en tout point est $\mathfrak{m}$. Or K est un groupe de Lie donc $T_kK = T_{e_K}K = \mathfrak{k}$. Par $K-$équivariance, $T_{k\eta_0}\mathcal{F} = k.T_{\eta_0}\mathcal{F}$. D'après le Corollaire 2.20, $T_{\eta_0}\mathcal{F} \simeq \mathfrak{n}_-$. Donc la différentielle en k de $k' \mapsto k'\eta_0$ est surjective de $\mathfrak{k}$ vers $\mathfrak{n}_-$, de noyau $\mathfrak{m}$.

Or pour tout $m \in M$,

$$km \longmapsto (k\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_{e_K}(k\eta_0)^{-1}km)_{e_K}.$$

On en déduit que la différentielle en k de l'application

$$\begin{aligned} K_{e_K} &\longrightarrow \mathcal{F}_{e_K} \times M \\ k' &\longmapsto (k'\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_{e_K}(k'\eta_0)^{-1}k')_{e_K} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{k}$ vers $\mathfrak{n}_- \times \mathfrak{m}$.

Donc pour tout $k \in K$, l'application

$$k' \longmapsto (k'\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_{e_K}(k'\eta_0)^{-1}k')_{e_K}$$

est un difféomorphisme local en k. Comme vu plus haut, elle est bijective. C'est donc un difféomorphisme.

Enfin, comme $K_c = cK_{e_K}$ pour tout $c \in K$, on en déduit que pour tout $c \in K$, l'application

$$K_c \longrightarrow \mathcal{F}_c \times M$$

est un difféomorphisme. $\square$

Définition 4.26. *Pour tout $c \in K$, on définit la* carte locale de Bruhat de K centrée en c, *définie sur l'ouvert K_c, par*

$$\begin{aligned} K_c &\longrightarrow \mathcal{F}_c \times M \\ k &\longmapsto (k\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_c(k\eta_0)^{-1}k)_c. \end{aligned}$$

On dira que ce sont les coordonnées locales de Bruhat de K.

L'application inverse s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c \times M &\longrightarrow K_c \\ (\eta \ ; \ m)_c &\longmapsto \mathfrak{S}_c(\eta)m. \end{aligned}$$

Changements de cartes

Proposition 4.27. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $c_1, c_2 \in K$, l'application de changement de carte de $\mathcal{F}_{c_1} \times M$ à $\mathcal{F}_{c_2} \times M$ s'écrit

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{c_1} \cap \mathcal{F}_{c_2}) \times M &\longrightarrow (\mathcal{F}_{c_2} \cap \mathcal{F}_{c_1}) \times M \\ (\eta \ ; \ m)_{c_1} &\longmapsto (\eta \ ; \ m_{c_2,c_1}(\eta)m)_{c_2}. \end{aligned}$$

De plus, cette application est un difféomorphisme.

Preuve : Soient $c_1, c_2 \in K$. Pour tout $\eta \in \mathcal{F}_{c_1} \cap \mathcal{F}_{c_2}$, tout $m \in M$, alors par la Définition 4.26, l'inverse d'une carte locale de Bruhat s'écrit

$$(\eta \ ; \ m)_{c_1} \longmapsto \mathfrak{S}_{c_1}(\eta)m.$$

Or par la Définition 4.22,

$$\mathfrak{S}_{c_1}(\eta) = \mathfrak{S}_{c_2}(\eta)m_{c_2,c_1}(\eta).$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{c_1}(\eta)m = \mathfrak{S}_{c_2}(\eta)m_{c_2,c_1}(\eta)m.$$

On reconnaît à droite les coordonnées $(\eta \ ; \ m_{c_2,c_1}(\eta)m)_{c_2}$.

Enfin, les applications de changement de cartes sont différentiables, puisque les cartes le sont. □

Action de G et M sur K, cocycle à valeurs dans M L'action de G sur K est définie, rappelons-le, par

$$(g, k) \longmapsto k_I(gk).$$

On définit maintenant une fonction qui permettra de lire cette action dans les cartes de Bruhat de K.

Définition 4.28. *Soient $c_0, c_1 \in K$. Pour tout $\xi \in \mathcal{F}_{c_0}$ et $g \in G$ tels que $g\xi \in \mathcal{F}_{c_1}$, on définit*

$$\sigma^M_{c_1,c_0}(g, \xi) := \mathfrak{S}_{c_1}(g\xi)^{-1}k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\big).$$

Lorsque $c_1 = c_0$, pour alléger les notations, on écrira

$$\sigma^M_{c_0}(g, \xi) := \sigma^M_{c_1,c_0}(g, \xi).$$

Ainsi, pour tout $\xi \in \mathcal{F}_{c_0}$ et $g \in G$ tel que $g\xi \in \mathcal{F}_{c_1}$,

$$k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\big) = \mathfrak{S}_{c_1}(g\xi)\sigma^M_{c_1,c_0}(g, \xi). \tag{4.4}$$

Fait 4.29. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $c_0, c_1 \in K$, la fonction $\sigma^M_{c_1,c_0}$ est à valeurs dans M.

Preuve : Soient $c_0, c_1 \in K$. Soit $\xi \in \mathcal{F}_{c_0}$ et $g \in G$ tels que $g\xi \in \mathcal{F}_{c_1}$. Par définition,

$$\sigma^M_{c_1,c_0}(g, \xi) = \mathfrak{S}_{c_1}(g\xi)^{-1} k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\big).$$

Comme $\mathfrak{S}_{c_0}$ est une section du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$

$$\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\eta_0 = \xi.$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{c_1}(g\xi) = \mathfrak{S}_{c_1}(g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\eta_0).$$

Or d'après le Fait 4.24, appliqué à $g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi) \in G$, puisque

$$g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\eta_0 = g\xi \in \mathcal{F}_{c_1},$$

alors

$$\mathfrak{S}_{c_1}(g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\eta_0)^{-1} k_I(g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)) \in M.$$

D'où

$$\mathfrak{S}_{c_1}(g\xi)^{-1} k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\xi)\big) \in M,$$

c'est-à-dire

$$\sigma^M_{c_1,c_0}(g, \xi) \in M.$$

□

Proposition 4.30. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors

(i) L'action par multiplication à gauche de G sur K se lit sur le système de coordonnées $\big(\mathcal{F}_c \times M\big)_{c\in K}$ de la manière suivante : fixons $c_0 \in K$, pour tout $g \in G$ et $(\eta\ ;\ m)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0} \times M$, soit $c_1 \in K$ tel que $g\eta \in \mathcal{F}_{c_1}$, alors

$$g.(\eta\ ;\ m)_{c_0} = (g\eta\ ;\ \sigma^M_{c_1,c_0}(g, \eta)m)_{c_1}.$$

(ii) L'action par multiplication à droite de M sur K se lit sur le système de coordonnées $\big(\mathcal{F}_c \times M\big)_{c\in K}$ de la manière suivante : pour tout $\alpha \in M$ et $(\eta\ ;\ m)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0} \times M$,

$$\phi^\alpha(\eta\ ;\ m)_{c_0} = (\eta\ ;\ m\alpha)_{c_0}.$$

Preuve : Prouvons le point (i). Soit $c_0 \in K$, fixons $g \in G$ et $(\eta\ ;\ m)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0} \times M$ et considérons $c_1 \in K$ tel que $g\eta \in \mathcal{F}_{c_1}$.

D'après la Définition 4.26, on écrit l'image de $(\eta\ ;\ m)$ par l'inverse de la carte de Bruhat

$$(\eta\ ;\ m)_{c_0} \longmapsto \mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m.$$

Faisons agir g sur $\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m$, puis calculons

$$k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m\big).$$

Appliquons le Fait 4.12, à $g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta) \in G$ et $m \in M$,

$$k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m\big) = k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)\big)m.$$

Enfin, par Définition 4.28

$$k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)\big) = \mathfrak{S}_{c_1}(g\eta)\sigma^M_{c_1,c_0}(g,\eta).$$

D'où

$$k_I\big(g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m\big) = \mathfrak{S}_{c_1}(g\eta)\sigma^M_{c_1,c_0}(g,\eta)m.$$

Or, via l'inverse de la carte $K_{c_1} \to \mathcal{F}_{c_1} \times M$, on trouve

$$(g\eta\ ;\ \sigma^M_{c_1,c_0}(g,\eta)m)_{c_1} \longmapsto \mathfrak{S}_{c_1}(g\eta)\sigma^M_{c_1,c_0}(g,\eta)m.$$

D'où

$$g.(\eta\ ;\ m)_{c_0} = (g\eta\ ;\ \sigma^M_{c_1,c_0}(g,\eta)m)_{c_1}.$$

Pour le point (ii), on explicite d'abord l'élément correspondant dans K_{c_0},

$$(\eta\ ;\ m)_{c_0} \longmapsto \mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m.$$

On multiplie à droite par $\alpha \in M$, d'où

$$\phi^\alpha(\eta\ ;\ m)_{c_0} \longmapsto \mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m\alpha.$$

On repasse en coordonnées $\mathcal{F}_{c_0} \times M$,

$$(\eta\ ;\ m\alpha)_{c_0} \longmapsto \mathfrak{S}_{c_0}(\eta)m\alpha.$$

On en déduit

$$\phi^\alpha(\eta\ ;\ m)_{c_0} = (\eta\ ;\ m\alpha)_{c_0}.$$

□

En particulier, la fonction σ^M est un cocycle à valeurs dans M. Elle vérifie les Propriétés suivantes.

Proposition 4.31. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $\xi \in \mathcal{F}$ et $g_1, g_2 \in G$. Alors*

(1) Pour tous $c_0, c_0', c_1, c_1' \in K$ tels que $\xi \in \mathcal{F}_{c_0} \cap \mathcal{F}_{c_0'}$ et $g_1\xi \in \mathcal{F}_{c_1} \cap \mathcal{F}_{c_1'}$,

$$\sigma^M_{c_1',c_0'}(g_1,\xi) = m_{c_1',c_1}(g_1\xi)\sigma^M_{c_1,c_0}(g_1,\xi)m_{c_0,c_0'}(\xi).$$

(2) Pour tous $c_0, c_1, c_2 \in K$ tels que $(\xi, g_1\xi, g_2g_1\xi) \in \mathcal{F}_{c_0} \times \mathcal{F}_{c_1} \times \mathcal{F}_{c_2}$, on a la relation de cocycle

$$\sigma^M_{c_2,c_0}(g_2g_1,\xi) = \sigma^M_{c_2,c_1}(g_2,g_1\xi)\sigma^M_{c_1,c_0}(g_1,\xi).$$

Preuve : Prouvons le premier point. Écrivons d'une part l'action de g_1 sur $(\xi\ ;\ e_M)_{c_0'}$ dans la carte $\mathcal{F}_{c_1'} \times M$,

$$g_1(\xi\ ;\ e_M)_{c_0'} = (g_1\xi\ ;\ \sigma^M_{c_0',c_1'}(g_1,\xi))_{c_1'}.$$

D'autre part, appliquons le changement de cartes $\mathcal{F}_{c_0'} \times M$ vers $\mathcal{F}_{c_0} \times M$,

$$(\xi\ ;\ e_M)_{c_0'} \longmapsto (\xi\ ;\ m_{c_0,c_0'}(\xi))_{c_0}.$$

Écrivons maintenant l'action de g_1 dans les coordonnées $\mathcal{F}_{c_1} \times M$,

$$g_1(\xi\ ;\ m_{c_0,c_0'}(\xi))_{c_0} = (g_1\xi\ ;\ \sigma^M_{c_0,c_1}(g_1,\xi)m_{c_0,c_0'}(\xi))_{c_1}.$$

Appliquons le changement de cartes $\mathcal{F}_{c_1} \times M$ vers $\mathcal{F}_{c'_1} \times M$,

$$(g_1\xi \;;\; \sigma^M_{c_0,c_1}(g_1,\xi)m_{c_0,c'_0}(\xi))_{c_1} \longmapsto (g_1\xi \;;\; m_{c'_1,c_1}(g_1\xi)\sigma^M_{c_0,c_1}(g_1,\xi)m_{c_0,c'_0}(\xi))_{c'_1}.$$

D'où

$$\sigma^M_{c'_0,c'_1}(g_1,\xi) = m_{c'_1,c_1}(g_1\xi)\sigma^M_{c_0,c_1}(g_1,\xi)m_{c_0,c'_0}(\xi).$$

La relation de cocycle est vérifiée par $\sigma^M_{\cdot,\cdot}$ puisque cette fonction permet de lire l'action de G sur K dans les coordonnées locales de Bruhat. D'où le second point. $\square$

Pour tout $c \in K$, l'application

$$k \in K_c \longmapsto k\eta_0 \in \mathcal{F}_c$$

s'écrit dans les coordonnées $\mathcal{F}_c \times M$ par

$$(\xi \;;\; m)_c \longmapsto \xi \in \mathcal{F}_c.$$

Enfin, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K_c \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_c \times M \arrow[d] \\ \mathcal{F}_c \arrow[r] & \mathcal{F}_c \end{tikzcd}$$

est commutatif, équivariant pour l'action par multiplication à droite de M.

4.3.3 Coordonnées locales de G

Cocycle généralisé sur $\mathfrak{a} \times M$

Définition 4.32. *Soient $c_0, c_1 \in K$. Pour tout $\xi \in \mathcal{F}$ et $g \in G$ tels que $\xi \in \mathcal{F}_{c_0}$ et $g\xi \in \mathcal{F}_{c_1}$, on pose*

$$\sigma_{c_1,c_0}(g,\xi) := \big(\sigma(g,\xi), \sigma^M_{c_1,c_0}(g,\xi)\big).$$

La Proposition 4.31 se généralise à ce cocycle.

Proposition 4.33. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $\xi \in \mathcal{F}$ et $g_1, g_2 \in G$. Alors*

(1) Pour tout $c'_0, c'_1 \in K$ tels que $\xi \in c'_0 N^- \eta_0$ et $g_1\xi \in c'_1 N^- \eta_0$,

$$\sigma_{c'_1,c'_0}(g_1,\xi) = m_{c'_1,c_1}(g_1\xi)\sigma_{c_1,c_0}(g_1,\xi)m_{c_0,c'_0}(\xi).$$

(2) Pour tout $c_2 \in K$ tel que $g_2 g_1 \xi \in c_2 N^- \eta_0$, on a la relation de cocycle

$$\sigma_{c_2,c_0}(g_2 g_1,\xi) = \sigma_{c_2,c_1}(g_2, g_1\xi)\sigma_{c_1,c_0}(g_1,\xi).$$

Preuve. Cela découle directement des Propriétés 2.26 du cocycle d'Iwasawa, ainsi que des Propriétés 4.31 du cocycle à valeurs dans M. $\square$

Cartes locales Pour tout $c \in G$, par décomposition de Bruhat, $cN^{-}MAN$ est un ouvert et son complémentaire est une union de sous-variétés fermées de dimensions inférieures de G. Notons

$$G_c := cN^{-}MAN.$$

C'est l'*ouvert de Bruhat de G centré en c*. Par décomposition d'Iwasawa $G = KAN^{-}$, on peut supposer que $c \in K$. Remarquons que puisque $\mathcal{F}_c^{(2)} := G_c.(\eta_0, \check{\eta}_0)$, l'application

$$\begin{aligned} G_c &\longrightarrow \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \\ g &\longmapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0\ ;\ \sigma(g, \eta_0)) \end{aligned}$$

est surjective.

Proposition 4.34. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $c \in K$, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c : G_c &\longrightarrow \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M \\ g &\longmapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0\ ;\ \sigma_{c,e_G}(g, \eta_0))_c \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Preuve : Pour tout $c \in G$, l'application $\mathcal{H}_c$ est différentiable, puisque chaque coordonnée est différentiable. Comme $G_c = cG_{e_G}$, si $\mathcal{H}_{e_G}$ est un difféomorphisme, alors $\mathcal{H}_c$ aussi.

Prouvons d'abord que $\mathcal{H}_{e_G}$ est un difféomorphisme local en e_G. Restreinte aux trois premières coordonnées, on reconnaît la restriction de la paramétrisation de Hopf à $G_{e_G}M \subset G/M$. Comme la paramétrisation de Hopf est un difféomorphisme de G/M dans $\mathcal{F}^{(2)} \times \mathfrak{a}$, la différentielle en e_G de l'application

$$g \longmapsto (g\eta_0, g\check{\eta}_0\ ;\ \sigma(g, \eta_0))$$

est surjective de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$. La différentielle en e_G du cocycle σ^M_{c,e_G} est surjective de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{m}$. D'après la décomposition de Bruhat,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}.$$

Donc la différentielle en e_G de $\mathcal{H}_{e_G}$ est un isomorphisme.

Soit $u \in G_{e_G}$. Pour tout $\epsilon \in G_{e_G}$ dans un voisinage de e_G, tel que $u\epsilon \in G_{e_G}$,

$$u\epsilon \longmapsto (u\epsilon\eta_0, u\epsilon\check{\eta}_0\ ;\ \sigma_{e_G}(u\epsilon, \eta_0))_{e_G}.$$

Comme σ_{e_G} vérifie la relation de cocycle,

$$\begin{aligned} \sigma_{e_G}(u\epsilon, \eta_0) &= \sigma_{e_G}(u, \epsilon\eta_0)\sigma_{e_G}(\epsilon, \eta_0) \\ &= \sigma_{e_G}(u, \eta_0)\sigma_{e_G}(\epsilon, \eta_0) + o(\epsilon). \end{aligned}$$

D'où

$$u\epsilon \longmapsto \big(u(\epsilon\eta_0), u(\epsilon\check{\eta}_0)\ ;\ \sigma_{e_G}(u, \eta_0)\sigma_{e_G}(\epsilon, \eta_0) + o(\epsilon)\big)_{e_G}.$$

Or

$$\epsilon \longmapsto (\epsilon\eta_0, \epsilon\check{\eta}_0\ ;\ \sigma_{e_G}(\epsilon, \eta_0))_{e_G}$$

est un difféomorphisme local en e_G. Donc $\mathcal{H}_{e_G}$ est un difféomorphisme local en tout point de G_{e_G}.

Prouvons que $\mathcal{H}_{e_G}$ est bijective. Soit $(\eta, \check{\eta}\ ;\ u_\mathfrak{a}, u_M) \in \mathcal{F}^{(2)}_{e_G} \times \mathfrak{a} \times M$. Considérons l'élément $g \in G$ dont les coordonnées d'Iwasawa-Hopf sont

$$\mathcal{H}_G(g) = \big(\mathfrak{S}_{e_G}(\eta)u_M, \check{\eta}\ ;\ u_\mathfrak{a}\big).$$

En particulier,

$$\begin{cases} k_I(g) & = & \mathfrak{S}_{e_G}(\eta)u_M \\ g\check{\eta}_0 & = & \check{\eta} \\ \sigma(g,\eta_0) & = & u_\mathfrak{a}. \end{cases}$$

Donc $g \in K_{e_G}AN$. Or

$$K_{e_G}AN = (N^-MAN \cap K)AN = N^-MAN = G_{e_G}.$$

D'où $g \in G_{e_G}$. Écrivons $k_I(g) = \mathfrak{S}_{e_G}(\eta)u_M \in K_{e_G}$ en coordonnées locales $\mathcal{F}_{e_G} \times M$

$$k_I(g) \longmapsto (\eta\ ;\ u_M)_{e_G}.$$

On en déduit $g\eta_0 = k_I(g)\eta_0 = \eta$ et

$$\sigma^M_{e_G}(g,\eta_0) = u_M.$$

D'où $\mathcal{H}_{e_G}(g) = (\eta, \check{\eta}\ ;\ u_\mathfrak{a}, u_M)_{e_G}$ et la surjectivité de $\mathcal{H}_{e_G}$.

Soit maintenant $g' \in G$ tel que $\mathcal{H}_{e_G}(g) = \mathcal{H}_{e_G}(g')$. Comme les coordonnées dans $\mathcal{F}^{(2)}_{e_G} \times \mathfrak{a}$ sont égales, on en déduit $g'M = gM$. Donc il existe $c \in M$ tel que

$$g' = gc.$$

D'après le Fait 4.12, on a $k_I(g') = k_I(g)c$, donc

$$\sigma^M_{e_G}(g',\eta_0) = \sigma^M_{e_G}(g,\eta_0)c.$$

Or comme $\mathcal{H}_{e_G}(g) = \mathcal{H}_{e_G}(g')$, en particulier, les dernières coordonnées sont égales, d'où $c = e_M$ et l'injectivité de $\mathcal{H}_{e_G}$.

L'application $\mathcal{H}_{e_G}$ est bijective et c'est un difféomorphisme local en tout point. C'est donc un difféomorphisme. On en déduit que pour tout $c \in K$, l'application $\mathcal{H}_c$ est un difféomorphisme. □

Définition 4.35. *On définit pour tout $c \in K$, l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c : G_c &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)}_c \times \mathfrak{a} \times M \\ g &\longmapsto \big(g\eta_0, g\check{\eta}_0\ ;\ \sigma_{c,e_G}(g,\eta_0)\big)_c. \end{aligned}$$

On appellera ces applications les coordonnées de Bruhat-Hopf *de G.*

Changements de cartes et passage en coordonnée d'Iwasawa-Hopf

Fait 4.36. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $c \in K$, on passe des coordonnées locales de Bruhat-Hopf aux coordonnées d'Iwasawa-Hopf par l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G \circ \mathcal{H}_c^{-1} : \mathcal{F}^{(2)}_c \times \mathfrak{a} \times M &\longrightarrow \mathcal{F}^{(2)}_G \times \mathfrak{a} \\ (\eta, \xi\ ;\ u_\mathfrak{a}, u_M)_c &\longmapsto (\mathfrak{S}_c(\eta)u_M, \xi\ ; u_\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Preuve . Il suffit de lire l'application

$$g \in G_c \longmapsto g \in G$$

dans les coordonnées locales de Bruhat-Hopf au départ et les coordonnées d'Iwasawa-Hopf pour l'arrivée. □

Explicitons maintenant les changements de cartes.

Proposition 4.37. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors pour tout $c, c' \in K$ le difféomorphisme de changement de cartes $\mathcal{H}_{c'} \circ \mathcal{H}_c^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{F}_c^{(2)} \cap \mathcal{F}_{c'}^{(2)}\right) \times \mathfrak{a} \times M &\longrightarrow \left(\mathcal{F}_{c'}^{(2)} \cap \mathcal{F}_c^{(2)}\right) \times \mathfrak{a} \times M \\ (\eta, \xi\ ;\ u)_c &\longmapsto (\eta, \xi\ ;\ m_{c',c}(\eta)u)_{c'}.\end{aligned}$$

C'est une conséquence directe de la Proposition 4.27.

Preuve : Soient $c, c' \in K$ et $(\eta, \xi\ ;\ u)_c \in \left(\mathcal{F}_c^{(2)} \cap \mathcal{F}_{c'}^{(2)}\right) \times \mathfrak{a} \times M$. Écrivons les coordonnées de ce point dans les coordonnées d'Iwasawa-Hopf $\mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}$

$$(\eta, \xi\ ;\ u)_c \longmapsto (\mathfrak{S}_c(\eta)u_M, \xi\ ;\ u_{\mathfrak{a}}).$$

Or par la Définition 4.22,

$$\mathfrak{S}_c(\eta) = \mathfrak{S}_{c'}(\eta)m_{c',c}(\eta).$$

Donc

$$(\mathfrak{S}_c(\eta)u_M, \xi\ ;\ u_{\mathfrak{a}}) = (\mathfrak{S}_{c'}(\eta)m_{c',c}(\eta)u_M, \xi\ ;\ u_{\mathfrak{a}}).$$

Repassons maintenant dans les coordonnées locales de Bruhat-Hopf centrées en c'

$$(\mathfrak{S}_{c'}(\eta)m_{c',c}(\eta)u_M, \xi\ ;\ u_{\mathfrak{a}}) \longmapsto (\eta, \xi\ ;\ u_{\mathfrak{a}}, m_{c',c}(\eta)u_M)_{c'}.$$

Comme

$$(u_{\mathfrak{a}}, m_{c',c}(\eta)u_M) = m_{c',c}(\eta)u,$$

on en déduit l'expression du changement de cartes. □

Actions de G et MA sur G

Proposition 4.38. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors

(i) L'action par multiplication à gauche de G sur G se lit sur le système de coordonnées $\left(\mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M\right)_{c \in K}$ de la manière suivante : fixons $c_0 \in K$, pour tout $g \in G$ et $(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0}^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$, soit $c_1 \in K$ tel que $g\eta \in \mathcal{F}_{c_1}$, alors

$$g.(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} = (g\eta, g\xi\ ;\ \sigma_{c_1,c_0}(g, \eta)u)_{c_1}.$$

(ii) L'action par multiplication à droite de $\mathfrak{a} \times M$ sur G se lit sur le système de coordonnées $\left(\mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M\right)_{c \in K}$ de la manière suivante : pour tout $\alpha \in \mathfrak{a} \times M$ et $(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0}^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$,

$$\phi^{\alpha}(\eta, \xi\ ;\ u)_{c_0} = (\eta, \xi\ ;\ u\alpha)_{c_0}.$$

C'est une conséquence directe de la Proposition 4.30 et des Propriétés d'équivariances des coordonnées d'Iwasawa-Hopf.

Preuve : Prouvons le point (i). Soient $c_0 \in K$ et $g \in G$.
Fixons $(\eta, \xi \ ; \ u)_{c_0} \in \mathcal{F}_{c_0}^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$ et considérons $c_1 \in K$ tel que $g\eta \in \mathcal{F}_{c_1}$.

Passons d'abord aux coordonnées d'Iwasawa-Hopf

$$(\eta, \xi \ ; \ u)_{c_0} \longmapsto (\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)u_M, \xi \ ; \ u_{\mathfrak{a}}).$$

Faisons agir g dans les coordonnées d'Iwasawa-Hopf,

$$g(\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)u_M, \xi \ ; \ u_{\mathfrak{a}}) = \big(k_I(g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)u_M), g\xi \ ; \ \sigma(g, \eta) + u_{\mathfrak{a}}\big).$$

Or l'action de g sur $\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)u_M$ s'écrit

$$k_I(g\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)u_M) = \mathfrak{S}_{c_1}(g\eta)\sigma^M_{c_1,c_0}(g, \eta)u_M.$$

D'où

$$g(\mathfrak{S}_{c_0}(\eta)u_M, \xi \ ; \ u_{\mathfrak{a}}) = (\mathfrak{S}_{c_1}(g\eta)\sigma^M_{c_1,c_0}(g, \eta)u_M, g\xi \ ; \ \sigma(g, \eta) + u_{\mathfrak{a}}).$$

Repassons maintenant dans la carte locale de Bruhat-Hopf de G centrée en c_1,

$$(\mathfrak{S}_{c_1}(g\eta)\sigma^M_{c_1,c_0}(g, \eta)u_M, g\xi \ ; \ \sigma(g, \eta) + u_{\mathfrak{a}}) \longmapsto (g\eta, g\xi \ ; \ \sigma_{c_1,c_0}(g, \eta)u)_{c_1}.$$

On fait de même pour le point (ii). $\square$

On en déduit le Corollaire suivant.

Corollaire 4.39. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow K \\ g &\longmapsto k_I(g) \end{aligned}$$

se lit dans les coordonnées locales de Bruhat-Hopf de G au départ et à l'arrivée dans les coordonnées locales de K par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M &\longrightarrow \mathcal{F}_c \times M \\ (\eta, \xi \ ; \ u)_c &\longmapsto (\eta \ ; \ u_M)_c. \end{aligned}$$

De plus, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G \supset G_c \arrow[r, "\mathcal{H}_c"] \arrow[d] & \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M \arrow[d] \\ K \supset K_c \arrow[r] & \mathcal{F}_c \times M \end{tikzcd}$$

est commutatif, équivariant pour l'action par multiplication à droite de M et à gauche de G.

Pour tout $c \in K$, l'application

$$g \in G_c \longmapsto gM \in G/M$$

s'écrit dans les coordonnées $\mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M$ par

$$(\eta, \xi \ ; \ u)_c \longmapsto (\eta, \xi \ ; \ u_{\mathfrak{a}}) \in \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a}.$$

Enfin, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G \supset G_c \arrow[r, "\mathcal{H}_c"] \arrow[d] & \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M \arrow[d] \\ G/M \supset G_cM \arrow[r, "\mathcal{H}"] & \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

est commutatif, équivariant pour l'action par multiplication à droite de $\mathfrak{a} \times M$ et à gauche de G. Enfin, ces coordonnées explicitent les trivialisations locales de la section $G \overset{M}{\to} G/M$.

4.4 Produits d'éléments loxodromiques

Tout d'abord, on généralise la projection de Jordan des éléments loxodromiques à $\mathfrak{a}\times M$. Ensuite, on réinterprète la décomposition de Jordan d'un élément loxodromique en termes d'action à droite d'éléments bien choisis de $\mathfrak{a} \times M$.

On exprime ensuite le cocycle généralisé $\sigma^M_{c,c'}$ à valeurs dans $\mathfrak{a} \times M$ d'éléments loxodromiques, grâce à cette généralisation de la projection de Jordan. Pour des éléments loxodromiques suffisamment contractants, on récupère des estimations uniformes du cocycle généralisé.

4.4.1 Généralisation de la projection de Jordan

On rappelle que $g \in G$ est loxodromique si $\lambda(g) \in \mathfrak{a}^{++}$. D'après la Proposition 2.31, pour tout élément $h_g \in G$ diagonalisant la partie hyperbolique de g, il existe un unique $m_g \in M$ tel que

$$g = h_g m_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1}.$$

De plus, pour tout $(h'_g, m'_g) \in G \times M$ tel que $g = h'_g m'_g e^{\lambda(g)} h'^{-1}_g$, il existe un unique $\delta \in MA$ tels que

$$h'_g = h_g \delta \text{ et } m'_g = \delta m_g \delta^{-1}.$$

Le bassin d'attraction de $g^+ := h_g \eta_0$ dans $\mathcal{F}$ est $h_g N^- \eta_0$, et $g^- := h_g \check{\eta}_0$ est son point fixe répulsif. C'est une carte de Bruhat de K.

Rappelons que pour tout $c \in K$, l'ensemble des points de $\mathcal{F}$ non transverses à $c\check{\eta}_0$ est noté $\mathcal{X}(c\check{\eta}_0)$ et défini par

$$\mathcal{X}(c\check{\eta}_0) = (cN^- \eta_0)^{\complement}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{X}(c\check{\eta}_0)^{\complement}. \tag{4.5}$$

En particulier, à tout élément loxodromique, on peut associer une carte de Bruhat particulière sur $\mathcal{F}$, celle qui correspond au bassin d'attraction de son point fixe attractif. Ceux-ci correspondent aux points en position générale avec son point fixe répulsif.

Définition 4.40. *Soit $c \in K$. Pour tout $g \in G^{lox}$ tel que $g^+ \in cN^-\eta_0$, on définit*

$$\lambda_c(g) := \sigma_c(g, g^+).$$

Notons $\lambda_c^M := \sigma_c^M$ la coordonnée dans M de la projection de Jordan généralisée.

Remarquons que

$$\lambda_{c'}(g) = m_{c,c'}(g^+)^{-1}\lambda_c(g)m_{c,c'}(g^+).$$

Proposition 4.41. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $g \in G^{lox}$ un élément loxodromique.*

Alors pour tout $c \in K$ tel que $g^+ \in \mathcal{F}_c$, l'élément $h_{g,c} \in G_c$ de coordonnées locales de Bruhat-Hopf

$$(g^+, g^- \ ; \ e_{\mathfrak{a}\times M})_c$$

diagonalise la partie hyperbolique g_h de g et

$$g = h_{g,c}\lambda_c^M(g)e^{\lambda(g)}h_{g,c}^{-1}.$$

De plus,

$$k_I(h_{g,c}) = \mathfrak{S}_c(g^+).$$

Preuve. En effet, puisque $(g^+, g^-) \in \mathcal{F}_c^{(2)}$ est fixé par l'action de g,

$$g(g^+, g^- \ ; \ e_{\mathfrak{a}\times M})_c = (g^+, g^- \ ; \ \sigma_c(g, g^+))_c.$$

On reconnaît à droite l'action par multiplication à droite de $\sigma_c(g, g^+) \in \mathfrak{a} \times M$. On traduit dans G_c,

$$gh_{g,c} = h_{g,c}\sigma_c^M(g, g^+)e^{\sigma(g,g^+)}.$$

Enfin, comme $\sigma(g, g^+) = \lambda(g)$ et $\lambda_c^M(g) := \sigma_c^M(g, g^+)$, on déduit

$$gh_{g,c} = h_{g,c}\lambda_c^M(g)e^{\lambda(g)}.$$

D'où

$$g = h_{g,c}\lambda_c^M(g)e^{\lambda(g)}h_{g,c}^{-1}.$$

En coordonnées d'Iwasawa-Hopf, $h_{g,c}$ s'écrit d'une part

$$(k_I(h_{g,c}), h_{g,c}\check{\eta}_0 \ ; \ \sigma(h_{g,c}, \eta_0)).$$

D'autre part, le Fait 4.36 nous dit

$$\mathcal{H}_G \circ \mathcal{H}_c^{-1}\Big((g^+, g^- \ ; \ e_{\mathfrak{a}\times M})_c\Big) = (\mathfrak{S}_c(g^+), g^- \ ; \ 0).$$

D'où

$$k_I(h_{g,c}) = \mathfrak{S}_c(g^+).$$

□

Fait 4.42. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soient $g \in G^{lox}$ un élément loxodromique et $u \in G$.*

Alors l'élément ugu^{-1} est loxodromique de points fixes attractif $u.g^+$ et répulsif $u.g^-$. De plus, pour tout $c, c' \in K$ tels que $g^+ \in \mathcal{F}_c$ et $u.g^+ \in \mathcal{F}_{c'}$

$$\lambda_{c'}(ugu^{-1}) = \sigma_{c',c}^M(u, g^+) \ \lambda_c(g) \ \sigma_{c',c}^M(u, g^+)^{-1}.$$

Preuve : La projection de Jordan $\lambda : G \to \mathfrak{a}^+$ est bien invariante par conjugaison, donc

$$\lambda(ugu^{-1}) = \lambda(g).$$

En particulier, si $g \in \Gamma^{lox}$, alors pour tout $u \in G$, l'élément ugu^{-1} est bien loxodromique.

Soient $c, c' \in K$ tels que $g^+ \in \mathcal{F}_c$ et $u.g^+ \in \mathcal{F}_{c'}$. Écrivons d'une part la relation de cocycle pour $u^{-1}u = e_G$:

$$\sigma_c(u^{-1}u, g^+) = \sigma_{c,c'}(u^{-1}, u.g^+)\sigma_{c',c}(u, g^+).$$

D'autre part,

$$\sigma_c(e_G, g^+) = e_{\mathfrak{a}\times M}.$$

D'où

$$\sigma_{c,c'}(u^{-1}, u.g^+) = \sigma_{c',c}(u, g^+)^{-1}.$$

Enfin, appliquons la relation de cocycle à $\sigma_{c'}(ugu^{-1}, u.g^+) = \lambda_{c'}(ugu^{-1})$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{c'}(ugu^{-1}, u.g^+) &= \sigma_{c',c}(u, gu^{-1}u.g^+)\ \sigma_c(g, u^{-1}u.g^+)\ \sigma_{c,c'}(u^{-1}, u.g^+) \\
&= \sigma_{c',c}(u, g.g^+)\ \sigma_c(g, g^+)\ \sigma_{c,c'}(u^{-1}, u.g^+) \\
&= \sigma_{c',c}(u, g^+)\ \lambda_c(g)\ \sigma_{c,c'}(u^{-1}, u.g^+).
\end{aligned}$$

Enfin, comme $\sigma_{c,c'}(u^{-1}, u.g^+) = \sigma_{c',c}(u, g^+)^{-1}$ et comme $\mathfrak{a}$ est abélien, on en déduit

$$\lambda_{c'}(ugu^{-1}) = \sigma^M_{c',c}(u, g^+)\ \lambda_c(g)\ \sigma^M_{c',c}(u, g^+)^{-1}.$$

$\square$

4.4.2 Cocycle dans M d'un élément loxodromique

Pour tout $\xi \in \mathcal{F}$, considérons un élément $\check{k}_\xi \in K$ tel que

$$\check{k}_\xi \check{\eta}_0 = \xi.$$

Rappelons (Cf Définition 2.23) les notations

$$\mathcal{X}(\xi) := (\check{k}_\xi N^- \eta_0)^\complement = \mathcal{F}^\complement_{\check{k}_\xi}.$$

Soit $g \in G^{lox}$. D'après le Lemme 2.55, $\mathcal{X}(g^-)^\complement$ est le bassin d'attraction de g^+. Par conséquent, comme $\check{k}_{g^-}\check{\eta}_0 = g^-$, l'ouvert de Bruhat

$$\mathcal{F}_{\check{k}_{g^-}} := \check{k}_{g^-} N^- \eta_0$$

est bien le bassin d'attraction de g^+.

Lemme 4.43. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $g \in G^{lox}$ un élément loxodromique. Considérons $\check{k}_{g^-} \in K$ tel que $\mathcal{F}_{\check{k}_{g^-}}$ soit le bassin d'attraction de g^+.*

Alors, pour tout $\xi \in \mathcal{F}_{\check{k}_{g^-}}$ et tout $n \geq 1$,

$$\sigma^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n, \xi) = \big(\lambda^M_{\check{k}_{g^-}}(g)\big)^n.$$

En particulier, pour tout $c, c' \in K$ tels que $\xi \in \mathcal{F}_c$ et $g^n\xi \in \mathcal{F}_{c'}$

$$\sigma^M_{c',c}(g^n, \xi) = m_{c',\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)\big(\lambda^M_{\check{k}_{g^-}}(g)\big)^n m_{\check{k}_{g^-},c}(\xi).$$

Le point crucial de ce Lemme est le choix de la carte de Bruhat sur lequel on calcule le cocycle. Les calculs s'arrangent parce que la carte de Bruhat choisie est précisément le bassin d'attraction de l'élément loxodromique.

Preuve : Comme, g^+ est transverse à $g^- = \check{k}_{g^-}\check{\eta}_0$ et $\check{k}_{g^-}N^-\eta_0 = \mathcal{X}(g^-)^{\complement}$ est l'ensemble des points transverses à g^-, on en déduit

$$g^+ \in \check{k}_{g^-}N^-\eta_0.$$

Considérons l'unique élément $p \in N^-$ tel que

$$g^+ = \check{k}_{g^-}p\eta_0.$$

Notons $h_g := \check{k}_{g^-}p$. Prouvons que $\sigma^M_{\check{k}_{g^-},e_G}(h_g, \eta_0) = e_M$. Par définition du cocycle,

$$k_I(h_g) = \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(h_g\eta_0)\sigma^M_{\check{k}_{g^-},e_G}(h_g, \eta_0).$$

Utilisons l'action de G sur K et puis $p \in N^-$,

$$k_I(h_g) = k_I(\check{k}_{g^-}p) = \check{k}_{g^-}k_I(p) = \check{k}_{g^-}\mathfrak{S}_0(p).$$

On reconnaît la définition de la section $\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}$,

$$k_I(h_g) = \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\check{k}_{g^-}p\eta_0) = \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(h_g\eta_0).$$

Ainsi, h_g s'écrit une coordonnées de Bruhat-Hopf sur la carte $G_{\check{k}_{g^-}}$,

$$\mathcal{H}_{\check{k}_{g^-}}(h_g) = \big(g^+, g^- \,;\, \sigma(h_g, \eta_0), e_M\big)_{\check{k}_{g^-}}.$$

Cet élément diagonalise la partie hyperbolique de g et $k_I(h_g) = \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^+)$. Notons $m_g = \lambda^M_{\check{k}_{g^-}}(g)$. On en déduit

$$g = h_g m_g e^{\lambda(g)} h_g^{-1}. \tag{4.6}$$

Soit $\xi \in \mathcal{F}_{\check{k}_{g^-}}$. Comme $\mathcal{F}_{\check{k}_{g^-}} = \check{k}_{g^-}N^-\eta_0$, il existe, d'après le Corollaire 2.20, un unique élément $u_\xi \in N^-$ tel que

$$\xi = \check{k}_{g^-}u_\xi\eta_0. \tag{4.7}$$

On veut estimer $\sigma^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n, \xi)$. Par Définition 4.28 du cocycle σ^M, pour tout $n \geq 1$,

$$k_I\Big(g^n\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\xi)\Big) = \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)\sigma^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n, \xi).$$

Nous allons estimer séparément $k_I\Big(g^n\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\xi)\Big)$ et $\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)$.

Pour tout $n \geq 1$, utilisons la définition de l'action de G à gauche sur K,

$$k_I\Big(g^n\check{k}_{g^-}u_\xi\Big) = k_I\Big(g^n\check{k}_{g^-}k_I(u_\xi)\Big).$$

Or par Définition 4.19 de la section de Bruhat,

$$\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\xi) = \check{k}_{g^-}k_I(u_\xi).$$

D'où

$$k_I\Big(g^n\check{k}_{g^-}u_\xi\Big) = k_I\Big(g^n\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\xi)\Big).$$

Calculons $k_I\Big(g^n\check{k}_{g^-}u_\xi\Big)$. D'après l'équation (4.6), pour tout $n \geq 1$,

$$g^n = h_g m_g^n e^{n\lambda(g)} h_g^{-1}.$$

D'où

$$g^n\check{k}_{g^-} = h_g m_g^n e^{n\lambda(g)} h_g^{-1}\check{k}_{g^-}.$$

Or $h_g = \check{k}_{g^-}p$ avec $p \in N^-$. Donc

$$g^n\check{k}_{g^-} = h_g m_g^n e^{n\lambda(g)} p^{-1}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} g^n\check{k}_{g^-}u_\xi &= h_g m_g^n e^{n\lambda(g)} p^{-1}u_\xi \\ &= \check{k}_{g^-}p m_g^n e^{n\lambda(g)} p^{-1}u_\xi. \end{aligned}$$

Posons $q_n := p m_g^n e^{n\lambda(g)} p^{-1}u_\xi m_g^{-n}$. On a donc

$$g^n\check{k}_{g^-}u_\xi = \check{k}_{g^-}q_n m_g^n.$$

De plus, puisque M normalise AN^-, on déduit $q_n \in AN^-$. D'où

$$k_I\Big(g^n\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\xi)\Big) = k_I\Big(g^n\check{k}_{g^-}u_\xi\Big) = \check{k}_{g^-}k_I(q_n m_g^n) = \check{k}_{g^-}k_I(q_n)m_g^n.$$

Estimons maintenant $\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)$. Comme $\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}$ est une section du fibré $K \overset{M}{\to} \mathcal{F}$,

$$\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)\eta_0 = g^n\xi = g^n\check{k}_{g^-}u_\xi\eta_0 = \check{k}_{g^-}q_n m_g^n\eta_0.$$

Or $m_g^n \in M$, donc

$$\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)\eta_0 = \check{k}_{g^-}q_n\eta_0.$$

En réutilisant la Définition 4.19 de la section de Bruhat, puis que $q_n \in AN^- = N^-A$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^n\xi) &= \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\check{k}_{g^-}q_n\eta_0) \\ &= \check{k}_{g^-}\mathfrak{S}_0(q_n\eta_0) \\ &= \check{k}_{g^-}k_I(q_n). \end{aligned}$$

D'où

$$k_I\Big(g^n\mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(\xi)\Big) = \check{k}_{g^-}k_I(q_n)m_g^n = \mathfrak{S}_{\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)m_g^n$$

et

$$\sigma^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n,\xi) = m_g^n = \lambda^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n).$$

La seconde égalité découle de la Propriété 4.33, (1).

$$\sigma^M_{c',c}(g,\xi) = m_{c',\check{k}_{g^-}}(g\xi)\sigma^M_{\check{k}_{g^-}}(g,\xi)m_{\check{k}_{g^-},c}(\xi).$$

□

4.4.3 Une estimée du cocycle

Au paragraphe §2.3.3 du Chapitre 2, on avait défini (Définition 2.62) une fonction continue

$$(\check{\eta}\ ;\ \xi_1, \xi_2) \longmapsto \nu(\check{\eta}\ ;\ \xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{a}$$

définie pour tout $\check{\eta} \in \mathcal{F}$ et tous points $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}(\check{\eta})^{\complement}$ transverses à $\check{\eta}$.
Dans le Lemme 2.64, on obtenait une estimée du cocycle d'Iwasawa pour les éléments loxodromiques suffisamment contractants, c'est-à-dire que pour tout $g \in G^{lox}$ et tout élément $\xi \in \mathcal{X}(g^-)^{\complement}$ du bassin d'attraction de g,

$$\lim_{n+\infty} \sigma(g^n, \xi) - \lambda(g)^n = \nu(g^-\ ;\ g^+, \xi).$$

On définit une famille de fonctions $(\nu^M_{c',c})_{c',c \in K}$ à valeurs dans M et on obtient des propriétés similaires pour la famille $(\sigma^M_{c',c})_{c',c \in K}$.

Fait 4.44. *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $\xi \in \mathcal{F}$. Choisissons $\check{k}_\xi \in K$ tel que $\check{k}_\xi \check{\eta}_0 = \xi$.*

Alors pour tout $\delta \in M$, pour tous $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$ et tous $c_1, c_2 \in K$ tels que $\eta_i \in \mathcal{F}_{c_i} \cap \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$ pour tout $i = 1, 2$, on a

$$m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1) m_{\check{k}_\xi,c_2}(\eta_2) = m_{c_1,\check{k}_\xi\delta}(\eta_1) m_{\check{k}_\xi\delta,c_2}(\eta_2).$$

En d'autres termes, la fonction

$$\nu^M_{c_1,c_2} : (\xi; \eta_1, \eta_2) \longmapsto m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1) m_{\check{k}_\xi,c_2}(\eta_2)$$

est définie indépendemment du choix du représentant de $\check{k}_\xi M$.

Preuve : Fixons $\delta \in M$.

D'après la Proposition 4.23 (iv)

$$m_{c_1,\check{k}_\xi\delta}(\eta_1) = m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1) m_{\check{k}_\xi,\check{k}_\xi\delta}(\eta_1).$$

D'après le point (iii) de la même Proposition,

$$m_{\check{k}_\xi,\check{k}_\xi\delta}(\eta_1) = \delta.$$

D'où

$$m_{c_1,\check{k}_\xi\delta}(\eta_1) = m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1)\delta.$$

De même,

$$m_{c_2,\check{k}_\xi\delta}(\eta_2) = m_{c_2,\check{k}_\xi}(\eta_2)\delta.$$

Or d'après le point (ii) de la même Proposition,

$$\begin{aligned} m_{\check{k}_\xi\delta,c_2}(\eta_2) &= m^{-1}_{c_2,\check{k}_\xi\delta}(\eta_2) \\ &= \delta^{-1} m^{-1}_{c_2,\check{k}_\xi}(\eta_2) \\ &= \delta^{-1} m_{\check{k}_\xi,c_2}(\eta_2). \end{aligned}$$

Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$ et $c_1, c_2 \in K$ tels que $\eta_i \in \mathcal{F}_{c_i} \cap \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$, pour tout $i = 1, 2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} m_{c_1,\check{k}_\xi\delta}(\eta_1) m_{\check{k}_\xi\delta,c_2}(\eta_2) &= m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1)\delta\delta^{-1} m_{\check{k}_\xi,c_2}(\eta_2) \\ &= m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1) m_{\check{k}_\xi,c_2}(\eta_2). \end{aligned}$$

□

Rappelons, d'après le Lemme 2.64, que pour tout élément loxodromique $g \in G^{lox}$ et pour tout point $\xi \in X \setminus \mathcal{X}(g^-)$, la suite $\Big(\sigma(g^n, \xi) - n\lambda(g)\Big)_{n\geq 1}$ converge vers un terme d'erreur dans $\mathfrak{a}$ noté $\nu(g,\eta) := \nu(g^-; g^+, \eta)$. De plus l'application ν est continue sur son ensemble de définition.

Définition 4.45 (Cf. Définitions 2.41, 2.62)**.** *Soit $\xi \in \mathcal{F}$. Choisissons $\check{k}_\xi \in K$ tel que $\check{k}_\xi \check{\eta}_0 = \xi$. Pour tous $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$ et tous $c_1, c_2 \in K$ tels que $\eta_i \in \mathcal{F}_{c_i} \cap \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$, on définit la fonction ν_{c_1,c_2} à valeurs dans $\mathfrak{a} \times M$ par*

$$\nu_{c_1,c_2}(\xi; \eta_1, \eta_2) := \Big(\nu(\xi : \eta_1, \eta_2), \nu^M_{c_1,c_2}(\xi; \eta_1, \eta_2)\Big).$$

Pour alléger les notations, on adopte la convention

$$\nu^M_c := \nu^M_{c,c}.$$

Soit $g \in G^{lox}$. Pour tout $\eta \in \mathcal{F}_{\check{k}_{g^-}}$ et tous $c_1, c_2 \in K$ tels que $g^+ \in \mathcal{F}_{c_1}$ et $\eta \in \mathcal{F}_{c_2}$ on définit

$$\nu^M_{c_1,c_2}(g, \eta) := \nu^M_{c_1,c_2}(g^-; g^+, \eta).$$

De même, on définit

$$\nu_{c_1,c_2}(g, \eta) := \Big(\nu(g, \eta), \nu^M_{c_1,c_2}(g, \eta)\Big).$$

Fait 4.46 (Cf. Fait 2.63)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Alors pour tous $c, c' \in K$, la fonction $\nu_{c,c'}$ est différentiable sur son ensemble de définition. De plus, pour tout $\xi \subset \mathcal{F}$ et tous $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathcal{F}^3_{\check{k}_\xi}$, tous $c_1, c_2, c_3 \in K$ tels que $\eta_i \in \mathcal{F}_{c_i}$ pour tout $i = 1...3$,*

$$\nu_{c_1,c_3}(\xi; \eta_1, \eta_3) = \nu_{c_1,c_2}(\xi; \eta_1, \eta_2)\nu_{c_2,c_3}(\xi; \eta_2, \eta_3).$$

Enfin pour tout $(\eta, \xi) \in \mathcal{F}^{(2)}$ et $c \in K$ tel que $\eta \in \mathcal{F}_c$,

$$\nu_c(\xi; \eta, \eta) = e_{\mathfrak{a}\times M}.$$

Par conséquent, pour tout élément $g \in G^{lox}$ et pour tout $c \in K$ tel que $g^+ \in cN^-\eta_0$, alors

$$\nu_c(g, g^+) = e_{\mathfrak{a}\times M}.$$

Preuve : Puisque les fonctions $m_{c,c'}$ sont différentiables, les fonctions $\nu^M_{c,c'}$ le sont aussi sur leur ensemble de définition. D'après le Fait 2.63, on conclut que les fonctions $\nu_{c,c'} = (\nu, \nu^M)$ sont continues sur leur ensemble de définition.

Vérifions la première égalité,

$$\begin{aligned}\nu^M_{c_1,c_3}(\xi; \eta_1, \eta_3) &= m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1)m_{\check{k}_\xi,c_3}(\eta_3)\\ &= m_{c_1,\check{k}_\xi}(\eta_1)m_{\check{k}_\xi,c_2}(\eta_2)m_{c_2,\check{k}_\xi}(\eta_2)m_{\check{k}_\xi,c_3}(\eta_3)\\ &= \nu^M_{c_1,c_2}(\xi; \eta_1, \eta_2)\nu^M_{c_2,c_3}(\xi; \eta_2, \eta_3).\end{aligned}$$

Enfin, grâce au Fait 2.63,

$$\nu(\xi; \eta_1, \eta_3) = \nu(\xi; \eta_1, \eta_2)\nu(\xi; \eta_2, \eta_3).$$

D'où l'égalité. □

Une nouvelle expression du cocycle d'un élément loxodromique Grâce aux fonctions $(\nu^M_{c,c'})_{c,c'\in K}$ à valeurs dans M, on réécrit le Lemme 4.43. Soit $g \in G^{lox}$ un élément loxodromique et $\xi \in \mathcal{X}(g^-)^\complement$ un point du bassin d'attraction de cet élément loxodromique. On va trouver une expression du cocycle $\sigma^M_{c',c}(g,\xi)$ faisant intervenir les fonctions $\nu^M_c, \nu^M_{c'}$ et la projection de Jordan généralisée de g, sans avoir à centrer la carte de Bruhat $\mathcal{F}_c$ sur le bassin d'attraction de g^+.

Lemme 4.47 (Cf Lemmes 2.40, 2.64)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soit $g \in G^{lox}$ un élément loxodromique.*

Alors, pour tout $\xi \in \mathcal{X}(g^-)^\complement$ et $n \geq 1$, pour tout $c_0, c_1, c_2 \in K$ tels que $\xi \in \mathcal{F}_{c_1}$ et $g^+ \in \mathcal{F}_{c_2}$ et $g^n\xi \in \mathcal{F}_{c_3}$,

$$\sigma^M_{c_3,c_1}(g^n,\xi) = \nu^M_{c_2,c_3}(g,g^n\xi)^{-1}\left(\lambda^M_{c_2}(g)\right)^n \nu^M_{c_2,c_1}(g,\xi).$$

Preuve : Soit $\check{k}_{g^-} \in K$ tel que $g^- = \check{k}_{g^-}\check{\eta}_0$. Alors pour tout $n \geq 1$, par la Proposition 4.31 (1)

$$\sigma^M_{c_3,c_1}(g^n,\xi) = m_{c_3,\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)\sigma^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n,\xi)m_{\check{k}_{g^-},c_1}(\xi).$$

Or d'après le Lemme 4.43,

$$\sigma^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n,\xi) = \lambda^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n).$$

D'où d'après le Lemme 4.43 (b),

$$\sigma^M_{c_3,c_1}(g^n,\xi) = m_{c_3,\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)\lambda^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n)m_{\check{k}_{g^-},c_1}(\xi).$$

Or d'après la Proposition 4.31 (1),

$$\lambda^M_{\check{k}_{g^-}}(g^n) = m_{\check{k}_{g^-},c_2}(g^+)\lambda^M_{c_2}(g^n)m_{c_2,\check{k}_{g^-}}(g^+).$$

D'où en remplaçant

$$\begin{aligned}\sigma^M_{c_3,c_1}(g^n,\xi) &= m_{c_3,\check{k}_{g^-}}(g^n\xi)m_{\check{k}_{g^-},c_2}(g^+)\lambda^M_{c_2}(g^n)m_{c_2,\check{k}_{g^-}}(g^+)m_{\check{k}_{g^-},c_1}(\xi)\\ &= \nu^M_{c_3,c_2}(g^-;g^n\xi,g^+)\lambda^M_{c_2}(g^n)\nu^M_{c_2,c_1}(g^-;g^+,\xi).\end{aligned}$$

Or $\nu^M_{c_2,c_1}(g^-;g^+,\xi) = \nu^M_{c_2,c_1}(g,\xi)$ et

$$\nu^M_{c_3,c_2}(g^-;g^n\xi,g^+) = \nu^M_{c_2,c_3}(g^-;g^+,g^n\xi)^{-1} = \nu^M_{c_2,c_3}(g,g^n\xi)^{-1}.$$

D'où

$$\sigma^M_{c_3,c_1}(g^n,\xi) = \nu^M_{c_2,c_3}(g,g^n\xi)^{-1}\lambda^M_{c_2}(g^n)\nu^M_{c_2,c_1}(g,\xi).$$

□

4.4.4 Cocycle généralisé d'éléments loxodromiques

On choisit une métrique riemannienne sur M qui soit $Ad-$invariante (par M). Comme M est un groupe de Lie, il suffit de construire un produit scalaire $Ad-$invariant sur l'espace tangent en l'identité de M : son algèbre de Lie. Fixons une norme euclidienne sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$. Rendons la $Ad-$invariante en la moyennant par la mesure de Haar sur M. Comme M est compacte la mesure de Haar est finie et on obtient une norme euclidienne $Ad-$invariante de $\mathfrak{m}$. Cette norme sur $\mathfrak{m}$ induit un produit scalaire $Ad-$invariant sur $T_{e_M}M$. On définit une métrique $Ad-$invariante en tout point en transportant ce produit scalaire par multiplication à gauche par les éléments de M.

Enfin, on a construit une métrique riemannienne $Ad-$invariante sur M. Celle-ci induit une distance sur M qui est invariante par conjugaison par les éléments de M.

Par conséquent, comme $\mathfrak{a}$ est abélien, on se munit d'une distance sur $\mathfrak{a} \times M$ qui est invariante par conjugaison. Comme pour tout $c \in K$, la fonction ν_c est continue sur son ensemble de définition, on définit la famille de constantes d'uniforme continuité suivantes.

Définition 4.48 (Cf. Définitions 2.41, 2.62)**.** *Soient $r > 0$ et $\varepsilon \in]0, r]$, on définit*

$$C_{r,\varepsilon} := \sup_{\xi \in \mathcal{F}} \sup_{c \in K} \sup\{\|\nu_c(\xi; \eta_1, \eta_2)\| \mid \mathrm{d}(\eta_1, \mathcal{X}(\xi)) \geq 2r \text{ et } \eta_2 \in B(\eta_1, \varepsilon) \subset \mathcal{F}_c\}.$$

On avait déjà défini des constantes $C_{r,\varepsilon}$ dans les Définitions 2.41 et 2.62. Les constantes définies ci-dessus majorent ces dernières. Par abus de notations, nous les noterons par la même lettre. Soient $r > 0$ et $\varepsilon \in]0, r]$. Rappelons qu'un élément $g \in G^{lox}$ est $(r, \varepsilon)-$loxodromique s'il vérifie les trois conditions suivantes

(i) $\mathrm{d}(g^+, \mathcal{X}(g^-)) \geq 2r$,

(ii) $g\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))^{\complement} \subset B(g^+, \varepsilon)$,

(iii) la restriction de g à $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))^{\complement}$ est $\varepsilon-$ lipschitzienne.

On combine le Lemme 2.65 avec le Lemme 4.47 précédent.

Lemme 4.49 (Cf. Lemmes 2.42, 2.65)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact.*

Alors

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} C_{r,\varepsilon} = 0$,

(ii) pour tout élément $(r, \varepsilon)-$loxodromique $g \in G$, pour tout $\xi \in \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))^{\complement}$ et tous $c_0, c_1 \in K$ tels que $\xi \in \mathcal{F}_{c_0}$ et $(g^n\xi)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_{c_1}$, pour tout $n \geq 1$,

$$\sigma_{c_1,c_0}(g^n, \xi) \in B(\lambda_{c_1}(g)^n \nu_{c_1,c_0}(g, \xi), C_{r,\varepsilon}).$$

(iii) pour tout élément $(r, \varepsilon)-$loxodromique $g \in G$, pour tout $c \in K$ et $\xi \in \mathcal{F}_c$ tel que $\mathrm{d}(\xi, \mathcal{X}(g^-)) \geq 6r$ et pour tout $\xi' \in B(\xi, \varepsilon) \subset \mathcal{F}_c$,

$$\nu_c(g, \xi)^{-1}\nu_c(g, \xi') \in B(e_{\mathfrak{a}\times M}, C_{r,\varepsilon}).$$

Preuve : Prouvons (i), que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} C_{r,\varepsilon} = 0$. Pour tout $\xi \subset \mathcal{F}$ et $c \in K$, posons

$$C_{r,\varepsilon}(\xi, c) := \sup\{\nu_c(\xi; \eta_1, \eta_2) \mid \mathrm{d}(\eta_1, \xi) \geq 2r \text{ et } \eta_2 \in B(\eta_1, \varepsilon) \subset \mathcal{F}_c\}.$$

Comme K agit transitivement sur $\mathcal{F}$, alors

$$\sup_{c \in K} C_{r,\varepsilon}(\xi, c) = C_{r,\varepsilon}.$$

Pour tout $c \in K$, on fixe un élément $\eta_c \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$. D'après le Fait 4.46, la fonction

$$\eta_1 \longmapsto \nu_c(\xi; \eta_c, \eta_1)$$

est bien définie et continue sur $\mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{\check{k}_\xi}$. Par conséquent, elle est uniformément continue sur le compact $\mathcal{F}_c \cap \mathcal{V}_{2r}(\mathcal{X}(\xi))^{\complement}$. De plus, pour tout $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{V}_{2r}(\mathcal{X}(\xi))^{\complement} \cap \mathcal{F}_c$,

$$\begin{aligned}\nu_c(\xi; \eta_1, \eta_2) &= \nu_c(\xi; \eta_1, \eta_c)\nu_c(\xi; \eta_c, \eta_2)\\ &= \nu_c(\xi; \eta_c, \eta_1)^{-1}\nu_c(\xi; \eta_c, \eta_2).\end{aligned}$$

On en déduit que $(C_{r,\varepsilon}(\xi, c))_{\varepsilon \leq r}$ est une suite de constantes d'uniforme continuité de la fonction $\nu_c(\xi; \eta_c, \cdot)$ restreinte au compact $\mathcal{V}_{2r}(\mathcal{X}(\xi))^{\complement} \cap \mathcal{F}_c$. D'où pour tout $c \in K$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} C_{r,\varepsilon}(\xi, c) = 0.$$

Comme K est compact, on en déduit

$$C_{r,\varepsilon} = \sup_{c \in K} C_{r,\varepsilon}(\xi, c) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le point (i).

Prouvons (ii). Pour tout $r > 0$ et tout $\varepsilon \in]0, r]$, remarquons que par définition,

$$C_{r,\varepsilon} := \sup_{c \in K} \sup\{\nu_c(g, \eta) \mid g \in G^{lox} \text{ est } (r, \varepsilon) - \text{loxodromique et } \eta \in B(g^+, \varepsilon) \subset \mathcal{F}_c\}.$$

Soit $g \in G^{lox}$ un élément $(r, \varepsilon)-$loxodromique. Pour tout $\eta \in \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g^-))^{\complement}$ et $c_0, c_1 \in K$ tels que $\eta \in \mathcal{F}_{c_0}$ et $g^+, g\eta \in \mathcal{F}_{c_1}$, d'après le Lemme 4.47,

$$\sigma^M_{c_1,c_0}(g^n, \xi) = \nu^M_{c_1,c_1}(g, g^n\xi)^{-1}\big(\lambda^M_{c_1}(g)\big)^n\ \nu^M_{c_1,c_0}(g, \xi).$$

D'une part, comme g est $(r, \varepsilon)-$loxodromique, $g^n\xi \in B(g^+, \varepsilon)$ et on déduit

$$\nu^M_{c_1,c_1}(g, g^n\xi)^{-1} \in B(e_M, C_{r,\varepsilon}).$$

D'autre part, pour la coordonnée dans $\mathfrak{a}$, on utilise le Lemme 2.64 pour en déduire

$$\sigma(g^n, \xi) \in B\big(n\lambda(g) + \nu(g, \xi), C_{r,\varepsilon}\big).$$

D'où (ii)

$$\sigma_{c_1,c_0}(g^n, \xi) \in B\big(\lambda_{c_1}(g)^n\ \nu_{c_1,c_0}(g, \xi), C_{r,\varepsilon}\big).$$

Prouvons (iii), écrivons

$$\begin{aligned}\nu_c(g, \xi)^{-1}\nu_c(g, \xi') &= \nu_c(g^-; g^+, \xi)^{-1}\nu_c(g^-; g^+, \xi')\\ &= \nu_c(g^-; \xi, g^+)\nu_c(g^-; g^+, \xi')\\ &= \nu_c(g^-; \xi, \xi').\end{aligned}$$

Par définition de $C_{r,\varepsilon}$, pour tout $\xi, \xi' \in \mathcal{V}_{2r}(\mathcal{X}(g^-))^{\complement}$ tels que $\mathrm{d}(\xi, \xi') \leq \varepsilon$,

$$\nu_c(g^-; \xi, \xi') \in B(e_{\mathfrak{a}\times M}, C_{r,\varepsilon}).$$

D'où le point (iii). □

Ce Lemme va nous permettre d'obtenir la propriété suivante.

4.4.5 Projection de Jordan généralisée d'un produit d'éléments loxodromiques

Proposition 4.50 (Cf. Propositions 2.44, 2.66)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, réel linéaire, connexe, de type non-compact. Soient $l \geq 1$ un entier, $g_1, .., g_l \in G^{lox}$ une suite d'éléments $(r, \varepsilon)-$loxodromiques et $c_1..., c_l \in K$, tels que, en notant $g_0 = g_l$ et $c_0 = c_l$,*

(a) $\mathrm{d}(g_{i-1}^+, \mathcal{X}(g_i^-)) \geq 6r$ *pour tout $i = 1, ..., l$,*

(b) pour tout $i = 1, ..., l$,

$$B(g_{i-1}^+, \varepsilon) \cup B(g_i^+, \varepsilon) \subset \mathcal{F}_{c_i}.$$

Pour tout $i = 1, ..., l$, définissons

$$\nu_i := \nu_{c_i, c_{i-1}}(g_i, g_{i-1}^+).$$

Pour tout $(n_i)_{1 \leq i \leq l} \in (\mathbb{N}^*)^l$, notons $w := g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}$. Alors

(i) l'élément w est $(2r, 2\varepsilon)-$loxodromique et

$$w^+ \in B(g_l^+, \varepsilon) \text{ et } \mathcal{X}(w^-) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_1^-)).$$

(ii)

$$\lambda_{c_l}(w) \in B\big(\lambda_{c_l}(g_l)^{n_l} \nu_l ... \lambda_{c_1}(g_1)^{n_1} \nu_1\ ,\ 2lC_{r,\varepsilon}\big).$$

Preuve : D'après la Proposition 2.66, l'élément $w = g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}$ est $(2r, 2\varepsilon)-$loxodromique et

$$w^+ \in B(g_l^+, \varepsilon) \text{ et } \mathcal{X}(w^-) \subset \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_1^-)).$$

D'où le point (i).

D'après la même Proposition, en posant $\nu := \nu(g_l, g_{l-1}^+) + ... + \nu(g_1, g_l^+)$, on a

$$\Big\| \lambda(g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}) - \sum_{1 \leq i \leq l} n_i \lambda(g_i) - \nu \Big\| \leq 2lC_{r,\varepsilon}.$$

Il reste à calculer

$$\lambda_{c_l}^M(w) = \sigma_{c_l}^M(w, w^+).$$

Posons $\xi_0 := w^+$ et pour tout $i = 1, ..., l$

$$\xi_i := g_i^{n_i} ... g_1^{n_1} \xi_0.$$

D'après le point (i) et puisque g_l est $(r, \varepsilon)-$loxodromique,

$$\xi_0 \in B(g_l^+, \varepsilon).$$

On utilise l'hypothèse (b) pour en déduire

$$\xi_0 \in B(g_l^+, \varepsilon) \subset \mathcal{F}_{c_l}.$$

Par récurrence sur l, on déduit que pour tout $i = 0, ..., l$ avec $c_0 = c_l$

$$\xi_i \in B(g_i^+, \varepsilon) \subset \mathcal{F}_{c_i}.$$

Appliquons maintenant la relation de cocycle :

$$\begin{aligned}\sigma^M_{c_l,c_0}(w,w^+) &= \sigma^M_{c_l,c_0}(g_l^{n_l}...g_1^{n_1},\xi_0)\\ &= \sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},g_{l-1}^{n-1}...g_1^{n_1}\xi_0)\sigma^M_{c_{l-1},c_0}(g_{l-1}^{n-1}...g_1^{n_1},\xi_0)\\ &= \sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},\xi_{l-1})\sigma^M_{c_{l-1},c_0}(g_{l-1}^{n-1}...g_1^{n_1},\xi_0).\end{aligned}$$

Appliquons le Lemme 4.47 au premier terme $\sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},\xi_{l-1})$:

$$\begin{aligned}\sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},\xi_{l-1}) &= \nu^M_{c_l,c_l}(g_l,g_l^{n_l}\xi_{l-1})^{-1}\big(\lambda^M_{c_l}(g_1)\big)^{n_l}\ \nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l,\xi_{l-1})\\ &= \nu^M_{c_l}(g_l,\xi_l)^{-1}\big(\lambda^M_{c_l}(g_l)\big)^{n_l}\ \nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l,\xi_{l-1}).\end{aligned}$$

Le problème ici c'est que ξ_{l-1} et ξ_l dépendent non seulement des $(g_i)_{1\leq i\leq l}$ mais aussi des $(n_i)_{1\leq i\leq l}$. On va utiliser le fait que ξ_{l-1} est proche de g_{l-1}^+ et la continuité de $\nu^M_{c_l,c_{l-1}}$ pour contourner ce problème. D'après le Fait 4.46,

$$\begin{aligned}\nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l,\xi_{l-1}) &= \nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^-;g_l^+,\xi_{l-1})\\ &= \nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^-;g_l^+,g_{l-1}^+)\nu^M_{c_{l-1}}(g_l^-;g_{l-1}^+,\xi_{l-1})\\ &= \nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l,g_{l-1}^+)\nu^M_{c_{l-1}}(g_l^-;g_{l-1}^+,\xi_{l-1})\end{aligned}$$

Notons $\nu_l^M := \nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l,g_{l-1}^+)$. On a $\nu^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l,\xi_{l-1}) = \nu_l^M\nu^M_{c_{l-1}}(g_l^-;g_{l-1}^+,\xi_{l-1})$. On réinjecte cette expression pour réécrire $\sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},\xi_{l-1})$:

$$\sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},\xi_{l-1}) = \nu^M_{c_l}(g_l,\xi_l)^{-1}\big(\lambda^M_{c_l}(g_l)\big)^{n_l}\ \nu_l^M\nu^M_{c_{l-1}}(g_l^-;g_{l-1}^+,\xi_{l-1}).$$

Posons

$$\delta_l := \big(\lambda^M_{c_l}(g_l)^{n_l}\ \nu_l^M\big)^{-1}\nu^M_{c_l}(g_l,\xi_l)^{-1}\big(\lambda^M_{c_l}(g_l)^{n_l}\ \nu_l^M\big)\ \nu^M_{c_{l-1}}(g_l^-;g_{l-1}^+,\xi_{l-1}).$$

Alors on réécrit

$$\sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},\xi_{l-1}) = \big(\lambda^M_{c_l}(g_l)\big)^{n_l}\nu_l^M\ \delta_l.$$

D'où,

$$\sigma^M_{c_l,c_{l-1}}(g_l^{n_l},\xi_{l-1})\sigma^M_{c_{l-1},c_0}(g_{l-1}^{n-1}...g_1^{n_1},\xi_0) = \big(\lambda^M_{c_l}(g_l)\big)^{n_l}\nu_l^M\ \delta_l\sigma^M_{c_{l-1},c_0}(g_{l-1}^{n-1}...g_1^{n_1},\xi_0).$$

De même, on pose pour tout $i=1,...,l$ où $c_0=c_l$ et $g_0=g_l$,

$$\delta_i := \big(\lambda^M_{c_i}(g_i)^{n_i}\ \nu_i^M\big)^{-1}\nu^M_{c_i}(g_i,\xi_i)^{-1}\big(\lambda^M_{c_i}(g_i)^{n_i}\ \nu_i^M\big)\ \nu^M_{c_{i-1}}(g_i^-;g_{i-1}^+,\xi_{i-1}),$$

avec $\nu_i^M = \nu^M_{c_i,c_{i-1}}(g_i,g_{i-1}^+)$. Le même raisonnement réitéré l fois donne

$$\lambda^M_{c_l}(g_l^{n_l}...g_1^{n_1}) = \big(\lambda^M_{c_l}(g_l)\big)^{n_l}\nu_l^M\ \delta_l...\big(\lambda^M_{c_1}(g_1)\big)^{n_1}\nu_1^M\ \delta_1.$$

Maintenant écrivons

$$\begin{aligned}\delta_l\big(\lambda^M_{c_{l-1}}(g_{l-1})\big)^{n_{l-1}}\nu^M_{l-1} &= \big(\lambda^M_{c_{l-1}}(g_{l-1})\big)^{n_{l-1}}\nu^M_{l-1}\\ &\qquad\Big(\big(\lambda^M_{c_{l-1}}(g_{l-1})\big)^{n_{l-1}}\nu^M_{l-1}\Big)^{-1}\delta_l\big(\lambda^M_{c_{l-1}}(g_{l-1})\big)^{n_{l-1}}\nu^M_{l-1}.\end{aligned}$$

Comme la distance choisie sur M est invariante par conjugaison par les éléments de M et en conjuguant de proche en proche l fois les δ_i, on en déduit que pour tout $i=1,...,l$, il existe $\delta_i'\in M$, conjugué à δ_i, tels que

$$\lambda^M_{c_l}(g_l^{n_l}...g_1^{n_1}) = \big(\lambda^M_{c_l}(g_l)\big)^{n_l}\nu_l^M...\big(\lambda^M_{c_1}(g_1)\big)^{n_1}\nu_1^M\ \delta_1'...\delta_l'.$$

Prouvons maintenant que pour tout $i = 1, ..., l$,

$$\delta_i \in B(e_M, 2C_{r,\varepsilon}).$$

Or

$$\delta_i = \big(\lambda^M_{c_i}(g_i)^{n_i}\ \nu^M_i\big)^{-1}\nu^M_{c_i}(g_i,\xi_i)^{-1}\big(\lambda^M_{c_i}(g_i)^{n_i}\ \nu^M_i\big)\ \nu^M_{c_{i-1}}(g_i^-;g^+_{i-1},\xi_{i-1}).$$

D'abord, pour tout $i = 0, ..., l$, bornons $\nu^M_{c_i}(g_i,\xi_i)$ et ses conjugués. Pour cela, remarquons que

$$\xi_i \in B(g_i^+,\varepsilon) \subset \mathcal{F}_{c_i}.$$

Donc par définition de la constante $C_{r,\varepsilon}$, on a

$$\nu^M_{c_i}(g_i,\xi_i) \in B(e_M, C_{r,\varepsilon}).$$

La distance sur M étant invariante par conjugaison par les éléments de M, cela entraîne que

$$\big(\lambda^M_{c_i}(g_i)^{n_i}\ \nu^M_i\big)^{-1}\nu^M_{c_i}(g_i,\xi_i)^{-1}\big(\lambda^M_{c_i}(g_i)^{n_i}\ \nu^M_i\big) \in B(e_M, C_{r,\varepsilon}).$$

Maintenant, bornons $\nu^M_{c_{i-1}}(g_i^-;g^+_{i-1},\xi_{i-1})$. On utilise l'hypothèse (a),

$$g^+_{i-1} \in \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(g_i^-))^{\complement}.$$

Par inégalité triangulaire, puisque $\varepsilon \in]0,r]$ et $\xi_{i-1} \in B(g^+_{i-1},\varepsilon)$,

$$g^+_{i-1}, \xi_{i-1} \in \mathcal{V}_{5r}(\mathcal{X}(g_i^-))^{\complement}.$$

De plus, par l'hypothèse (b)

$$B(g^+_{i-1},\varepsilon) \subset \mathcal{F}_{c_{i-1}}.$$

D'où

$$g^+_{i-1}, \xi_{i-1} \in \mathcal{V}_{2r}(\mathcal{X}(g_i^-))^{\complement} \cap \mathcal{F}_{c_{i-1}}.$$

On utilise à nouveau la définition de $C_{r,\varepsilon}$ pour obtenir

$$\nu^M_{c_{i-1}}(g_i^-;g^+_{i-1},\xi_{i-1}) \in B(e_M, C_{r,\varepsilon}).$$

On en déduit $\delta_i \in B(e_M, 2C_{r,\varepsilon})$.

La distance sur M étant invariante par conjugaison par les éléments de M, cela entraîne que pour tout $i = 1, ..., l$

$$\delta'_i \in B(e_M, 2C_{r,\varepsilon}).$$

Par conséquent, $\delta'_1 ... \delta'_l \in B(e_M, 2lC_{r,\varepsilon})$, et on obtient le point (ii) :

$$\lambda^M_{c_l}(g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}) \in B\Big(\big(\lambda^M_{c_l}(g_l)\big)^{n_l}\nu^M_l ... \big(\lambda^M_{c_1}(g_1)\big)^{n_1}\nu^M_1, 2lC_{r,\varepsilon}\Big).$$

$\square$

Chapitre 5

Théorèmes de transitivité topologique

Dans ce chapitre, on supposera que G est un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact et Γ est un sous-semigroupe Zariski dense de G. On prouve des conditions de transitivité topologique pour

(i) l'action du flot directionnel des chambres de Weyl sur $\Gamma\backslash G/M$ (Proposition 5.9),

(ii) l'action par multiplication à droite de ϕ_θ^t sur $\Gamma\backslash G$ (Proposition 5.17).

Dans le premier paragraphe, on étudie la non-divergence des orbites des flots directionnels sur $\Gamma\backslash G/M$, ainsi que la *densité dans les plats maximaux* (Définition 5.1). Rappelons qu'une orbite est *divergente* lorsqu'elle sort de tout compact. On dira qu'une orbite $\phi_\theta^{\mathbb{R}}(\Gamma g) \subset \Gamma\backslash G/M$ est *dense dans un plat maximal* si

$$\Gamma g e^{\mathfrak{a}} M \subset \overline{\phi_\theta^{\mathbb{R}}(\Gamma g)} M.$$

Dans le Théorème 5.2, théorème principal de ce chapitre, on prouve une condition nécessaire sur θ de non-divergence des orbites des flots ϕ_θ^t agissant sur $\Gamma\backslash G$ et une condition nécessaire sur les flots réguliers, d'existence d'orbites denses dans un plat maximal modulo M. Ces conditions nécessaires font intervenir le cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$ défini au Chapitre 3 (Définition 3.1).

Dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, on définit l'ensemble limite $L_+(\Gamma)$ de Γ sur le bord de Furstenberg. Cela permet de considérer un sous-ensemble $\Gamma-$invariant naturel $L^{(2)}(\Gamma) \subset \mathcal{F}^{(2)} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Via les coordonnées de Hopf, cela permet de définir un sous-ensemble $\Gamma-$invariant de G/AM, noté $\widetilde{\Omega}_{G/AM}$. J-P. Conze et Y. Guivarc'h [CG02, Théorème 6.4] ont démontré quand $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ que l'action de Γ sur le sous-ensemble invariant $\widetilde{\Omega}_{G/AM}$ de G/AM est topologiquement transitive, c'est-à-dire qu'il existe une orbite de Γ dense dans $\widetilde{\Omega}_{G/AM}$. Le Théorème 4.1 de [DG18] coécrit avec O. Glorieux généralise ce résultat aux groupes de Lie semisimples réels linéaires, connexes, de type non-compact. De nouveau grâce aux coordonnées de Hopf, ce sous-ensemble fermé $\Gamma-$invariant naturel de G/AM permet de définir un sous-ensemble $\Gamma-$invariant et $\mathfrak{a}-$invariant de G/M, noté $\widetilde{\Omega}$. Ce sous-ensemble $\widetilde{\Omega} \subset G/M$ étant $\mathfrak{a}-$invariant, il contient en particulier des plats maximaux. Grâce au Théorème 5.2, on retrouve la condition nécessaire de transitivité topologique des systèmes dynamiques $(\Gamma\backslash\widetilde{\Omega}, \phi_\theta^t)$ lorsque $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, obtenue avec O. Glorieux.

Dans le troisième paragraphe, on applique et réécrit, grâce au formalisme du chapitre précédent, les Théorèmes 1, 2 et 1.9 de l'article d'Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR07] portant sur les sous-ensembles $\Gamma-$invariants du sous-groupe K.

Dans le dernier paragraphe, via les coordonnées locales de Bruhat-Hopf on définit une partition finie de sous-ensembles $\Gamma-$invariants et $\mathfrak{a}-$invariants de G. Grâce aux Théorèmes d'Y. Guivarc'h et A. Raugi, on déduit que pour tout flot régulier ϕ_θ^t, les systèmes dynamiques associés à cette partition sont tous conjugués. De nouveau grâce au Théorème 5.2, on obtient une condition nécessaire de transitivité topologique des actions des flots réguliers ϕ_θ^t sur $\Gamma\backslash G$.

5.1 Un théorème sur les orbites des flots directionnels

Pour tout élément $g \in G$, rappelons que la projection de Cartan de g, notée $\kappa(g) \in \mathfrak{a}^+$, est l'unique élément tel que $e^{\kappa(g)} \in KgK \cap A^+$. Rappelons que tout élément $g \in G$, se décompose sous la forme $g = g_e g_h g_u$, où $g_e, g_h, g_u \in G$ sont respectivement elliptiques, hyperboliques et unipotents et commutant deux à deux. La projection de Jordan de g, notée $\lambda(g)$, est l'unique élément de $\mathfrak{a}^+$ tel que la partie hyperbolique g_h est conjuguée à $e^{\lambda(g)}$.

Soit Γ un sous-semigroupe de G.

Rappelons qu'une orbite $\phi_\theta^{\mathbb{R}}(\Gamma g)$ est *non divergente* dans $\Gamma\backslash G$, s'il existe un compact C de $\Gamma\backslash G$ et une suite $t_n \to +\infty$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\phi_\theta^{t_n}(\Gamma g) \in C.$$

Définition 5.1. *Une orbite* $\phi_{\mathbb{R}}^\theta(\Gamma g) \subset \Gamma\backslash G$ *est* dense dans un plat maximal*, si*

$$\Gamma g e^{\mathfrak{a}} \subset \overline{\phi_\theta^{\mathbb{R}}(\Gamma g)}.$$

On dira qu'une orbite $\phi_\theta^{\mathbb{R}}(\Gamma g) \subset \Gamma\backslash G$ *est dense dans un plat maximal modulo* M*, si*

$$\Gamma g e^{\mathfrak{a}} M \subset \overline{\phi_\theta^{\mathbb{R}}(\Gamma g)} M.$$

Le résultat principal de ce chapitre est

Théorème 5.2. *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G et $\theta \in \mathfrak{a}^+$. Alors*

- *S'il existe une orbite non divergente dans $\Gamma\backslash G/M$ pour le flot directionnel ϕ_θ^t, alors θ est dans le cône limite de Γ.*
- *Si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et s'il existe une orbite dense dans un plat maximal de $\Gamma\backslash G/M$ pour le flot directionnel ϕ_θ^t, alors θ est dans l'intérieur du cône limite de Γ.*

Commençons par prouver le Lemme suivant, qui est une version continue du Lemme 2.58.

Lemme 5.3. *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soient $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et $h \in G$. Posons*

$$r_0 := \frac{1}{2}\mathrm{d}(h\eta_0, \mathcal{X}(h\check{\eta}_0)).$$

Alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction $t \in [t_0, +\infty[\mapsto \varepsilon_{t\theta} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

(i) pour tous $m \in M$ et $t \geq t_0$, l'élément $he^{t\theta}mh^{-1}$ est $(r_0, \varepsilon_{t\theta})-$loxodromique,

(ii) $\lim\limits_{t+\infty} \varepsilon_{t\theta} = 0$.

En particulier, pour tous $r \in]0, r_0]$ et $t \geq t_0$ tels que $\varepsilon_{t\theta} \leq r$, l'élément $he^{t\theta}mh^{-1}$ est $(r, \varepsilon_{t\theta})-$loxodromique.

Preuve : Posons $g_\theta = he^\theta h^{-1}$ et pour tout $m \in M$ et tout réel $t > 0$,

$$g_{t,m} := he^{t\theta}mh^{-1}.$$

Prouvons d'abord que pour tout $\varepsilon \in]0, r_0]$, il existe $T \geq 0$ tel que pour tout $m \in M$ et pour tout $t \geq T$, l'élément $g_{t,m}$ est $(r_0, \varepsilon)-$loxodromique.

- Pour cela, on vérifiera d'abord que dès que $t > 0$, l'élément $g_{t,m}$ est loxodromique et son point fixe attractif est à distance $2r_0$ du bord de son bassin d'attraction.
- Ensuite, on vérifiera qu'il existe un rang T à partir duquel $g_{t,m}$ est $\varepsilon-$Lipschitz sur son bassin d'attraction $\mathcal{X}(g_{t,m}^-)^\complement$.
- Enfin, on verra qu'il existe un entier $N_\varepsilon \geq 1$ tel que pour tout $t \geq N_\varepsilon$,

$$g_{t,m}\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_{t,m}^-))^\complement \subset B(g_{t,m}^+, \varepsilon).$$

Remarquons que

$$\lambda(g_{t,m}) = \lambda(he^{t\theta}mh^{-1}) = t\theta.$$

Comme $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, on en déduit que pour tout $m \in M$ et tout $t > 0$, l'élément $g_{t,m}$ est loxodromique et

$$(g_{t,m}^+, g_{t,m}^-) = (h\eta_0, h\check{\eta}_0) = (g_\theta^+, g_\theta^-).$$

Le bassin d'attraction de g_θ^+ est $\mathcal{X}(g_\theta^-)^\complement = hN^-\eta_0$. Or $r_0 = \frac{1}{2}\mathrm{d}(h\eta_0, \mathcal{X}(h\check{\eta}_0))$, d'où le premier point.

La différentielle en tout point de l'application

$$\begin{aligned} hN^-\eta_0 &\longrightarrow hN^-\eta_0 \\ hu_-\eta_0 &\longmapsto g_{t,m}hu_-\eta_0 = h(e^{t\theta}mu_-m^{-1}e^{-t\theta})\eta_0 \end{aligned}$$

s'écrit $hx \in h\mathfrak{n}_- \mapsto hAd(e^{t\theta})(x)$. Puisque

$$\mathfrak{n}_- := \bigoplus_{\alpha\in\Sigma_+} \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

où Σ_+ est l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{g}$, on déduit que les valeurs propres de cette différentielle sont $\left(e^{-t\alpha(\theta)}\right)_{\alpha\in\Sigma_+}$. Comme $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, pour tout racine positive $\alpha \in \Sigma_+$, le réel $\alpha(\theta)$ est strictement positif. Posons

$$\epsilon_\theta := \sup_{\alpha\in\Sigma_+} \left(e^{-\alpha(\theta)}\right).$$

On déduit $\epsilon_\theta \in]0, 1[$. Par conséquent, pour tout $t > 0$ et $m \in M$, la restriction de $g_{t,m}$ à son bassin d'attraction $hN^-\eta_0 = \mathcal{X}(g_{t,m}^-)^\complement$ est ϵ_θ^t-Lipschitz. Considérons T_ε tel que pour tout $t \geq T_\varepsilon$,

$$\epsilon_\theta^t \leq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $t \geq T_\varepsilon$ et tout $m \in M$, la restriction de $g_{t,m}$ à son bassin d'attraction $\mathcal{X}(g_{t,m}^-)^\complement$ est $\varepsilon-$Lipschitz, d'où le deuxième point.

De plus, pour tout entier $n \geq 1$ et $t \geq n$, comme M et A commutent

$$\begin{aligned} g_{t,m} &= he^{t\theta}mh^{-1} \\ &= he^{(t-n)\theta}me^{n\theta}h^{-1} \\ &= he^{(t-n)\theta}mh^{-1}he^{n\theta}h^{-1} \\ &= g_{t-n,m}\big(he^{\theta}h^{-1}\big)^{n} \\ &= g_{t-n,m}(g_\theta)^n. \end{aligned}$$

Or $g_\theta = g_{1,e_M}$ est aussi loxodromique. Appliquons le Lemme 2.58, à g_θ pour

$$r_0 = \frac{1}{2}\mathrm{d}(g_\theta^+, \mathcal{X}(g_\theta^-)).$$

Alors pour tout $\varepsilon \in]0, r_0]$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, l'élément g_θ^n est $(r_0, \varepsilon)-$loxodromique. En particulier,

$$g_\theta^n \mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_\theta^-))^\complement \subset B(g_\theta^+, \varepsilon).$$

Or pour tout $t \geq N_\varepsilon$, l'élément $g_{t-N_\varepsilon,m}$ est $\epsilon_\theta^{t-N_\varepsilon}-$Lipschitz sur $\mathcal{X}(g_\theta^-)^\complement$. On en déduit, puisque $\epsilon_\theta^{t-N_\varepsilon} \geq 1$,

$$g_{t-N_\varepsilon,m} B(g_\theta^+, \varepsilon) \subset B(g_\theta^+, \varepsilon).$$

D'où pour tout $t \geq N_\varepsilon$,

$$g_{t,m}\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_\theta^-))^\complement \subset B(g_\theta^+, \varepsilon).$$

On en déduit que pour tout $t \geq \sup(N_\varepsilon, T_\varepsilon)$, l'élément $g_{t,m}$ vérifie

- $g_{t,m}$ est loxodromique et $r_0 \leq \frac{1}{2}\mathrm{d}(g_{t,m}^+, \mathcal{X}(g_{t,m}^-))$,
- $g_{t,m}\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_{t,m}^-))^\complement \subset B(g_{t,m}^+, \varepsilon)$,
- la restriction de $g_{t,m}$ à $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathcal{X}(g_{t,m}^-))^\complement$ est $\varepsilon-$Lipschitz.

D'où pour tout $\varepsilon \in]0, r_0]$, il existe $T \geq 0$ tel que pour tout $m \in M$ et pour tout $t \geq T$, l'élément $g_{t,m}$ est $(r_0, \varepsilon)-$loxodromique.

On pose pour tout $t \geq t_0$,

$$\varepsilon_{t\theta} := \inf\{\varepsilon \in]0, r_0] \mid g_{t,m} \text{ est } (r_0, \varepsilon) - \text{loxodromique}\}.$$

On en déduit le point (i), par définition du réel strictement positif $\varepsilon_{t\theta}$.

De plus, comme la fonction $t \in [t_0, +\infty[\mapsto \varepsilon_{t\theta}$ est un module de continuité elle vérifie bien (ii)

$$\lim_{t+\infty} \varepsilon_{t\theta} = 0.$$

$\square$

Démonstration du Théorème 5.2 : Prouvons d'abord le premier point. Supposons qu'il existe une orbite non divergente. Soit $g \in G$ tel que l'orbite $\phi_\theta^t(\Gamma g)$ du point $x := \Gamma g$ est non divergente. L'orbite du point x admet un point d'accumulation, qu'on note $y \in \Gamma\backslash G$. Considérons $g_y \in G$ un représentant de y, i.e. $y = \Gamma g_y$.

Alors il existe $t_n \to +\infty$, une suite $\delta_n \to e_G$ et $\gamma_n \in \Gamma$ tels que

$$\tilde{\phi}_\theta^{t_n}(g) = ge^{t_n\theta} = \gamma_n g_y \delta_n.$$

Appliquons le Lemme 2.51, pour estimer les projections de Cartan de ces éléments pour tout $t_n \neq 0$,

$$\frac{1}{t_n}\kappa(ge^{t_n\theta}) \in \theta + \frac{1}{t_n}\overline{B(0, C_g)}$$
$$\frac{1}{t_n}\kappa(\gamma_n g_y \delta_n) \in \frac{1}{t_n}\kappa(\gamma_n) + \frac{1}{t_n}\overline{B(0, C_{g_y\delta_n})}.$$

Comme la suite δ_n converge vers e_G, alors le réel $C_{g_y\delta_n}$ est borné pour n assez grand. Prenons maintenant la limite lorsque $n \to +\infty$,

$$\lim_{n+\infty} \frac{1}{t_n}\kappa(\gamma_n) = \theta.$$

D'après le Théorème 3.2,

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \|\kappa(\gamma)\|\geq n}} \mathbb{R}\kappa(\gamma)}.$$

D'où, $\theta \in \mathcal{C}(\Gamma)$ et le premier point.

Supposons maintenant que $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et qu'il existe une orbite qui remplit un plat maximal modulo M. D'après le premier point, une telle orbite est non divergente et on en déduit que θ est un point du cône limite (fermé). Prouvons maintenant par l'absurde que $\theta \notin \partial\mathcal{C}(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++}$.

Soit $x \in \Gamma\backslash G$ un point dont l'orbite $\phi_\theta^t(x)$ est dense dans un plat maximal modulo M et choisissons $g_x \in G$ un représentant de x dans G.

Posons
$$\begin{cases} r & := \frac{1}{7}\mathrm{d}(g_x\eta_0, \mathcal{X}(g_x\check{\eta}_0)) \\ C_r & := \sup_{\varepsilon\in]0,r]} C_{r,\varepsilon}, \end{cases}$$

où les constantes $C_{r,\varepsilon}$ sont données dans la Définition 4.48.

Supposons par l'absurde que $\theta \in \partial\mathcal{C}(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++}$. Utilisons la convexité du cône limite. Soit H un hyperplan tangent au fermé convexe $\mathcal{C}(\Gamma)$, en contact au point θ. Notons H^+ le demi-espace délimité par l'hyperplan qui ne contient pas le cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$. Fixons $v \in H^+$ tel que

$$d(v, H) \geq 4C_r.$$

Alors par convexité

$$d(v + \mathbb{R}_+\theta, \mathcal{C}(\Gamma)) \geq d(v + \mathbb{R}_+\theta, H) = d(v, H) \geq 4C_r. \tag{5.1}$$

Or l'orbite $\phi_\theta^t(x)$ est dense dans un plat maximal modulo M, donc en particulier,

$$\overline{\phi_\theta^{\mathbb{R}}(\Gamma g_x)M} \supset \Gamma g_x e^{\mathfrak{a}} \ni \Gamma g_x e^v.$$

Traduisons, il existe des suites $(t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ et $(m_n)_{n\geq 1} \subset M$ et $(\gamma_n)_{n\geq 1} \subset \Gamma$ et $(\delta_n)_{n\geq 1} \subset G$ tels que

(a) $\lim_{n+\infty} t_n = +\infty$,

(b) $\lim_{n+\infty} \delta_n = e_G$,

(c) pour tout $n \geq 1$,
$$g_x e^{t_n\theta} m_n = \gamma_n g_x e^{-v}\delta_n.$$

Comme $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, l'intersection entre la demi-droite $v+\mathbb{R}_+\theta$ et $\mathfrak{a}^{++}$ est une demi-droite, on choisit $t_v \in \mathbb{R}_+$ de sorte que

$$v + [t_v, +\infty[\theta \subset \big(v + \mathbb{R}_+\theta\big) \cap \mathfrak{a}^{++}.$$

Pour tout $n \geq 1$, posons

$$\begin{cases} t'_n & := & t_n - t_v \\ \delta'_n & := & \big(g_x e^{-v}\delta_n e^v g_x^{-1}\big)^{-1}. \end{cases}$$

de sorte que pour tout $n \geq 1$,

$$g_x e^{v+t_v\theta+t'_n\theta} m_n g_x^{-1}\delta'_n = \gamma_n.$$

De plus, les conditions (a) et (b) sont préservées pour $(t'_n)_{n\geq 1}$ et $(\delta'_n)_{n\geq 1}$.

Pour tout $t > 0$ et $m \in M$, comme dans le Lemme 5.3, posons $g_{t,m} := g_x e^{t\theta} m g_x^{-1}$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$g_x e^{v+t_v\theta+t'_n\theta} m_n g_x^{-1} = g_x e^{v+t_v\theta} g_x^{-1} g_{t'_n,m_n}.$$

Appliquons le Lemme 5.3 à la suite $(g_{t'_n,m_n})_{n\geq 1}$. Il existe une fonction $t \mapsto \varepsilon_{t\theta}$ telle que

$$\lim_{t+\infty} \varepsilon_{t\theta} = 0,$$

et pour tout $t > 0$ tel que $\varepsilon_{t\theta} \leq r$, l'élément $g_{t,m}$ est $(r, \varepsilon_{t\theta})-$loxodromique. Fixons un réel $T_r > 0$ tel que pour tout $t \geq T_r$,

$$\varepsilon_{t\theta} \leq r.$$

D'après le point (a) $\lim\limits_{n+\infty} t'_n = +\infty$. Donc il existe un entier $N_r \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N_r$,

$$t'_n \geq T_r.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq N_r$, l'élément $g_{t'_n,m_n}$ est $(r, \varepsilon_{t'_n\theta})-$loxodromique.

Maintenant, comme

$$\lambda(g_x e^{v+t_v\theta} g_x^{-1}) = v + t_v\theta \in \mathfrak{a}^{++},$$

l'élément $g_x e^{v+t_v\theta} g_x^{-1}$ est loxodromique. Son point attractif est $g_x\eta_0 = g^+_{t,m}$, de bassin d'attraction $\mathcal{X}(g_x\check{\eta}_0)^\complement = \mathcal{X}(g^-_{t,m})^\complement$. De plus, sa restriction au bassin d'attraction est $1-$Lipschitz. Par conséquent, pour tout $n \geq N_r$, l'élément

$$g_n := g_x e^{v+t_v\theta} g_x^{-1} g_{t'_n,m_n}$$

est $(r, \varepsilon_{t'_n\theta})-$loxodromique.

D'après le Corollaire 2.60, puisque

$$r = \frac{1}{7}\mathrm{d}(g_n^+, \mathcal{X}(g_n^-)),$$

pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{r}{2}]$ tel que

- $\varepsilon_{t'_n\theta} \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

- $\delta'_n \in B(e_G, \frac{\varepsilon}{2})$

alors $g_n\delta'_n$ est $(2r, 2\varepsilon)-$loxodromique et $(g_n\delta'_n)^+ \in B(g_n^+, \varepsilon)$. Pour tout $n \geq N_r$, on pose

$$\varepsilon_n := \sup(2\varepsilon_{t'_n\theta}, 2\|\delta'_n\|).$$

D'après l'hypothèse (a) et le Lemme 5.3,

$$\lim_{n+\infty} \varepsilon_{t'_n\theta} = 0.$$

D'après l'hypothèse (b),

$$\lim_{n+\infty} \delta'_n = e_G.$$

Par conséquent, la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq N_r}$ converge vers 0. Donc il existe un rang $N'_r \geq N_r$ tel qu'à partir de ce rang, on puisse appliquer le Corollaire 2.60 i.e. pour tout $n \geq N'_r$, $g_n\delta'_n$ est $(2r, 2\varepsilon_n)-$loxodromique et

$$(g_n\delta'_n)^+ \in B(g_n^+, \varepsilon_n).$$

Par définition, pour tout $n \geq 1$, le point $\lambda(\gamma_n)$ est dans le cône limite. Estimer la projection de Jordan $\lambda(g_n\delta'_n)$, permettra de démontrer que $\lambda(\gamma_n)$ est, à partir d'un certain rang, dans un voisinage de $v + t_n\theta$.

En utilisant le Fait 2.54 et la relation de cocycle, on calcule $\lambda(g_n\delta'_n)$:

$$\begin{aligned}\lambda(g_n\delta'_n) &= \sigma(g_n\delta'_n, (g_n\delta'_n)^+)\\ &= \sigma(g_n, \delta'_n(g_n\delta'_n)^+) + \sigma(\delta'_n, (g_n\delta'_n)^+).\end{aligned}$$

Appliquons le Lemme 2.65 à $\sigma(g_n, \delta'_n(g_n\delta'_n)^+)$, puisque g_n est très contractant,

$$\sigma(g_n, \delta'_n(g_n\delta'_n)^+) - \lambda(g_n) - \nu(g_n^-; g_n^+, \delta'_n(g_n\delta'_n)^+) \in B(0, C_{r,\varepsilon_n}).$$

Or $\delta'_n(g_n\delta'_n)^+ \in B(g_n^+, 2\varepsilon_n)$, donc par Définition 4.48,

$$\|\nu(g_n^-; g_n^+, \delta'_n(g_n\delta'_n)^+)\| \leq C_{r,2\varepsilon_n}.$$

D'où

$$\sigma(g_n, \delta'_n(g_n\delta'_n)^+) - \lambda(g_n) \in B(0, C_{r,2\varepsilon_n} + C_{r,\varepsilon_n}).$$

D'après les propriétés (b)(i) et (b)(iii) du Lemme 2.49, on en déduit

$$\|\sigma(\delta'_n, (g_n\delta'_n)^+)\| \leq \|\kappa(\delta'_n)\|.$$

Enfin,

$$\lambda(g_n) = v + t_n\theta.$$

D'où pour tout $n \geq N'_r$,

$$\|\lambda(g_n\delta'_n) - (v + t_n\theta)\| \leq \|\kappa(\delta'_n)\| + C_{r,2\varepsilon_n} + C_{r,\varepsilon_n}.$$

Or $C_r \geq C_{r,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon \in]0, r]$, d'où

$$\|\lambda(g_n\delta'_n) - (v + t_n\theta)\| \leq \|\kappa(\delta'_n)\| + 2C_r.$$

Enfin, comme $(\delta'_n)_{n\geq 1}$ converge vers e_G, il existe un rang $N_0 \geq N'_r$ tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$\|\kappa(\delta'_n)\| \leq C_r.$$

Or $g_n\delta'_n = \gamma_n \in \Gamma$. Donc pour tout $n \geq N_0$,

$$\|\lambda(\gamma_n) - (v + t_n\theta)\| \leq 3C_r.$$

Pour conclure, rappelons que le cône limite est le plus petit cône fermé contenant toutes les projections de Jordan de Γ. Donc

$$d(v + \mathbb{R}_+\theta, \mathcal{C}(\Gamma)) \leq 3C_r,$$

ce qui contredit l'inégalité 5.1 obtenu par choix de v.

On en déduit donc que si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et qu'il existe une orbite dense dans un plat maximal modulo M, alors θ est dans l'intérieur du cône limite de Γ. □

En particulier, on en déduit le Corollaire suivant.

Corollaire 5.4. *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe discret, Zariski dense de G et $\theta \in \mathfrak{a}^+$. Alors*

- *S'il existe une orbite non-divergente dans $\Gamma\backslash G$ pour le flot directionnel ϕ_θ^t, alors θ est dans le cône limite de Γ.*
- *Si $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et qu'il existe une orbite dense dans un plat maximal de $\Gamma\backslash G$ pour le flot directionnel ϕ_θ^t, alors θ est dans l'intérieur du cône limite de Γ.*

5.2 Ensemble $\Gamma-$invariant et transitivité topologique

Commençons par définir l'ensemble limite de Γ sur le bord de Furstenberg. Ensuite, nous évoquerons le résultat de transitivité topologique de l'action de Γ sur G/AM de l'article [DG18]. Pour finir, grâce au Théorème 5.2 plus général, nous retrouvons la Proposition 5.9, qui est l'énoncé de transitivité topologique issu de [DG18].

5.2.1 Ensemble limite du bord de Furstenberg

Soit Γ un sous-semigroupe de G. Notons Γ^{-1} le sous-semigroupe formé par les inverses des éléments de Γ.

Définition 5.5. *Considérons $\nu_{\mathcal{F}}$ le poussé en avant de la mesure de Haar sur K par l'application $K \to \mathcal{F}$. On dit que le point $\eta \in \mathcal{F}$ est un* point limite *s'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ telle que la suite de mesure $\big((\gamma_n)_*\nu_{\mathcal{F}}\big)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers la masse de Dirac en η.*

*L'*ensemble limite *de Γ, noté $L_+(\Gamma)$, est le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ constitué des points limite pour Γ. C'est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{F}$.*

Notons $L_-(\Gamma)$ l'ensemble limite pour le sous-semigroupe Γ^{-1} et considérons

$$L^{(2)}(\Gamma) := \Big(L_+(\Gamma) \times L_-(\Gamma)\Big) \cap \mathcal{F}^{(2)}$$

l'ensemble des couples de points limites en position générale.

Remarquons que lorsque Γ est un sous-groupe, $L_+(\Gamma) = L_-\Gamma$. Ainsi, on retrouve que $L^{(2)}(\Gamma)$ est l'ensemble des couples de points limites de $L_+(\Gamma)$ en position générale.

Lemme 5.6 ([Ben97b] Lemme 3.6)**.** *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe discret, Zariski dense de G.*

Alors

(1) tout fermé $\Gamma-$invariant non vide de $\mathcal{F}$ contient $L_+(\Gamma)$, en particulier, l'action de Γ sur $L_+(\Gamma)$ est minimale et aucun point de $L_+(\Gamma)$ n'est isolé.

(2) l'ensemble

$$\{(\gamma^+, \gamma^-) \mid \gamma \in \Gamma^{lox}\}$$

est dense dans $L_+(\Gamma) \times L_-(\Gamma)$.

De plus, si l'ensemble limite $L_+(\Gamma) \neq \mathcal{F}$, alors il est d'intérieur vide.

Considérons le sous-ensemble $\Gamma-$invariant et $AM-$invariant suivant.

Définition 5.7. *Notons $\widetilde{\Omega} \subset G/M$ le sous-ensemble des* chambres de Weyl non-divergentes*, défini en coordonnées de Hopf par :*

$$\widetilde{\Omega} := \mathcal{H}^{-1}(L^{(2)}(\Gamma) \times \mathfrak{a}).$$

C'est un sous-ensemble $\Gamma-$invariant et $\mathfrak{a}-$invariant. Lorsque Γ est un sous-groupe, on note $\Omega := \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}$ l'espace quotient.

5.2.2 Transitivité topologique sur G/AM

Sur le fibré unitaire tangent des variétés à courbure strictement négative, Eberlein [Ebe72] avait prouvé la transitivité topologique du flot géodésique. J-P. Conze et Y. Guivarc'h ont démontré dans le Théorème 6.4 de l'article [CG02], pour $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, la transitivité topologique de l'action de Γ sur $L^{(2)}(\Gamma)$. Or en coordonnées de Hopf $L^{(2)}(\Gamma) \times \mathfrak{a} = \mathcal{H}(\widetilde{\Omega})$. Ainsi, de manière duale, cela équivaut à la transitivité topologique de l'action de A sur $\Omega = \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}$. Ce résultat se généralise aux groupes de Lie semisimples réels linéaires de type non-compact.

Théorème 5.8 (Théorème 4.5 [DG18])**.** *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe discret, Zariski dense de G.*

Alors pour tous ouverts non vides $\mathcal{U}^{(2)}, \mathcal{V}^{(2)} \subset L^{(2)}(\Gamma)$, il existe $g \in \Gamma$ tel que

$$g\mathcal{U}^{(2)} \cap \mathcal{V}^{(2)} \neq \emptyset.$$

Le lecteur ou la lectrice trouvera une preuve inspirée d'Eberlein [Ebe72] dans l'article [DG18].

5.2.3 Transitivité topologique sur G/M

En utilisant le Théorème 5.2 et la définition de Ω, on déduit une condition nécessaire de transitivité topologique des flots directionnels réguliers. Cette condition nécessaire correspond à la Proposition 4.2 de l'article co-écrit avec O. Glorieux [DG18].

Proposition 5.9 ([DG18])**.** *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe discret, Zariski dense de G.*

Alors la transitivité topologique du système dynamique (Ω, ϕ_θ^t) avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ régulier, entraîne que $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$.

Preuve : En effet, par $A-$invariance de l'ensemble $\Omega \subset \Gamma\backslash G/M$, l'ensemble Ω contient bien des plats maximaux. Ensuite, si le système dynamique topologique (Ω, ϕ_θ^t) avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ régulier est topologiquement transitif, alors en particulier tout point d'orbite dense va remplir au moins un plat maximal, le plat maximal contenant son orbite par le flot directionnel. On applique maintenant le Théorème 5.2, ce qui implique que θ est dans l'intérieur du cône limite. $\square$

5.3 Théorèmes de Guivarc'h-Raugi

Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Le sous-groupe compact M est le centralisateur de A dans K. Expliquons et retraduisons, grâce aux notations du Chapitre 4, les Théorèmes 1, 2, 1.9 ainsi que le Corollaire 1.10 de l'article d'Y. Guivarc'h et A. Raugi [GR07].

Rappelons quelques notions sur la projection de Jordan généralisée, détaillées dans la Définition 4.40 et la Proposition 4.41. Pour tout élément loxodromique $g \in G^{lox}$, pour tout $c \in K$ tel que g^+ est dans la carte de Bruhat $cN^-\eta_0$, notée $\mathcal{F}_c$, la projection de Jordan généralisée est définie par

$$\lambda_c(g) := \sigma_c(g, g^+) = (\lambda(g), \sigma_c^M(g, g^+)).$$

De plus, pour tout $c \in K$ tel que $g^+ \in \mathcal{F}_c$, l'élément $h_{g,c} \in G$, qui s'écrit dans la carte de Bruhat $G_c = cN^-MAN$,

$$h_{g,c} \longmapsto (g^+, g^-; e_{\mathfrak{a}\times M})_c$$

diagonalise la partie hyperbolique de g et vérifie

$$g = h_{g,c} e^{\lambda(g)} \lambda_c^M(g) h_{g,c}^{-1}.$$

Comme expliqué au paragraphe §4.4.1, pour tout $c, c' \in K$ tels que $g^+ \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$,

$$\lambda_{c'}(g) = m_{c,c'}(g^+)^{-1} \lambda_c^M(g) m_{c,c'}(g^+),$$

où $m_{c,c'} : \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'} \to M$ est le difféomorphisme défini dans la Définition 4.22.

Notons M^{ab} l'abélianisé du sous-groupe compact M et $\pi_{ab} : M \to M^{ab}$ le morphisme de groupe associé. Par abus, on notera π_{ab} le morphisme de groupe $\mathfrak{a} \times M \to \mathfrak{a} \times M^{ab}$.

Fait 5.10. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact.*

Alors pour tout $g \in G^{lox}$, pour tout $c, c' \in K$ tels que $g^+ \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$,

$$\pi_{ab}\big(\lambda_c(g)\big) = \pi_{ab}\big(\lambda_{c'}(g)\big).$$

Preuve : En effet, d'après la Définition 4.22, pour tout élément loxodromique $g \in G^{lox}$, pour tout $c, c' \in K$ tel que $g^+ \in \mathcal{F}_c \cap \mathcal{F}_{c'}$,

$$\lambda_{c'}^M(g) = m_{c,c'}(g^+)^{-1} \lambda_c^M(g) m_{c,c'}(g^+).$$

Or π_{ab} est un morphisme de groupe et M^{ab} est abélien, d'où

$$\begin{aligned}\pi_{ab}\big(\lambda_{c'}^M(g)\big) &= \pi_{ab}\big(m_{c,c'}(g^+)^{-1}\big)\pi_{ab}\big(\lambda_c^M(g)\big)\pi_{ab}\big(m_{c,c'}(g^+)\big)\\ &= \pi_{ab}\big(m_{c,c'}(g^+)^{-1}\big)\pi_{ab}\big(m_{c,c'}(g^+)\big)\pi_{ab}\big(\lambda_c^M(g)\big)\\ &= \pi_{ab}\big(\lambda_c^M(g)\big).\end{aligned}$$

□

Le Fait 5.10 assure que la définition suivante est indépendante du choix de $c \in K$.

Définition 5.11. *On définit la projection de Jordan* généralisée abélienne

$$\lambda^{ab} : G^{lox} \longrightarrow \mathfrak{a} \times M^{ab}$$

en posant, pour tout $g \in G^{lox}$,

$$\lambda^{ab}(g) := \pi_{ab}(\lambda_c(g))$$

où l'on a choisi $c \in K$ arbitraire tel que $g^+ \in \mathcal{F}_c$.

Lorsque M est abélien, la partie elliptique des éléments loxodromiques est donc bien définie. Définissons maintenant pour tout sous-semigroupe de G, les sous-groupes fermés de $\mathfrak{a}$ et M et M^{ab} contenant les informations sur les parties hyperboliques et elliptiques de ses éléments loxodromiques.

Définition 5.12. *Soit Γ un sous-semigroupe de G. Notons $\pi_{M^{ab}} : \mathfrak{a} \times M^{ab} \to M^{ab}$ la projection naturelle. Définissons les sous-groupes*

- $M_\Gamma^{ab} := \pi_{M^{ab}}\Big(\overline{\langle \lambda^{ab}(\Gamma^{lox}) \rangle} \Big)$,
- $M_\Gamma := \pi_{ab}^{-1}\big(M_\Gamma^{ab} \big)$.

Dans [Ben97a], Y. Benoist prouve que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ contient un sous-groupe Zariski dense dont tous les éléments n'ont que des valeurs propres positives si et seulement si n est non congru à 2 modulo 4. En particulier, ceci implique $M_\Gamma = \{e_M\}$ pour un tel sous-groupe Γ. Il démontre le même résultat pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Ainsi, lorsque n est non congru à 2 modulo 4, il existe un sous-groupe Γ Zariski dense dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ pour lequel $M_\Gamma \neq M$.

5.3.1 Propriétés du sous-groupe M_Γ

Le Théorème suivant, dû à Y. Guivarc'h et A. Raugi, décrit en toute généralité les propriétés du sous-groupe $M_\Gamma \subset M$. Notons M_0 la composante connexe de l'identité de M.

Théorème 5.13 (Théorème 1.9 [GR07])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Alors*

(a) M_Γ est un sous-groupe fermé et distingué de M, d'indice fini, contenant M_0,

(b) il existe un entier $p \in [0, \dim \mathfrak{a}]$ tel que M_Γ / M_0 est un groupe abélien fini, isomorphe à $\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)^p$,

(c) $M_{\Gamma^{-1}} = k_\iota M_\Gamma k_\iota^{-1}$ où $k_\iota \in N_K(A)$ est tel que $Ad(k_\iota)\mathfrak{a}^+ = -\mathfrak{a}^+$,

(d) pour tout $g \in G$, on a $M_{g\Gamma g^{-1}} = M_\Gamma$.

5.3.2 Ensembles $\Gamma-$invariants de K

Décrivons maintenant les sous-ensembles $\Gamma-$invariants de K. Comme $M_\Gamma \subset M$ est un sous-groupe d'indice fini de M contenant M_0, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "M_\Gamma"] \arrow[dd, "M"'] & \\
& K/M_\Gamma \arrow[dl, "M/M_\Gamma"] \\
\mathcal{F} \simeq K/M &
\end{tikzcd}$$

Notons

$$\pi_{\mathcal{F}} : k \in K \longmapsto k\eta_0 \in \mathcal{F}$$

la projection de K dans $\mathcal{F}$ de ce diagramme. Adoptons les coordonnées partielles de Bruhat-Hopf de K à valeurs dans $\mathcal{F} \times M$.

Pour tout $c \in K$, la carte de Bruhat centrée en c est définie par

$$K_c := cN^-MAN^+ \cap K.$$

Les coordonnées partielles de Bruhat-Hopf de K sur cette carte sont définies par

$$\begin{aligned} K_c &\longrightarrow \mathcal{F}_c \times M \\ k &\longmapsto (k\eta_0 \ ; \ \mathfrak{S}_c(k\eta_0)^{-1}k)_c. \end{aligned}$$

Définition 5.14. *Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. On note*

$$L_G(\Gamma) := \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(L_+(\Gamma)) \subset K.$$

C'est un sous-ensemble $M-$invariant à droite.

Appliquons maintenant le Théorème 2 de [GR07] pour l'action de G par multiplication à gauche sur K et à l'action de M par multiplication à droite sur K. Ce Théorème permet de partitionner le sous-ensemble fermé $M-$invariant à droite et $\Gamma-$invariant à gauche $L_G(\Gamma) \subset K$, en $|M/M_\Gamma|$ sous-ensembles fermés, invariants minimaux par l'action à gauche de Γ. Ils prouvent que ces sous-ensembles sont invariants à droite par l'action de M_Γ.

Théorème 5.15 (Théorème 2 [GR07])**.** *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G.*

Alors K admet un nombre fini de sous-ensembles fermés $\Gamma-$invariants minimaux, indexés par M/M_Γ, qu'on note $L_{[m]}(\Gamma)$.
De plus, pour tout $\xi \in L_+(\Gamma)$ et tout $c \in K$ tel que $\xi \in \mathcal{F}_c$, considérons $\upsilon_{c,\xi} \in M$ tel que

$$(\xi \ ; \ \upsilon_{c,\xi})_c \in L_{[e_M]}(\Gamma).$$

Alors pour tout $m \in M$, le sous-ensemble $L_{[m]}(\Gamma)$ s'écrit

$$L_{[m]}(\Gamma) := \overline{\Gamma.k_I(\mathfrak{S}_c(\xi))\upsilon_{c,\xi}m},$$

ou de manière équivalente en coordonnées locales de Bruhat-Hopf de K,

$$L_{[m]}(\Gamma) = \overline{\Gamma(\xi \ ; \ \upsilon_{c,\xi}m)_c},$$

et chacun de ces sous-ensembles fermé est $M_\Gamma-$invariant par multiplication à droite. Enfin, ces ensembles forment une partition du fermé $\Gamma-$invariant et $M-$invariant $L_G(\Gamma)$, i.e.

$$L_G(\Gamma) = \bigsqcup_{[m]\in M/M_\Gamma} L_{[m]}(\Gamma).$$

5.4 Une partition de G en sous-ensembles Γ-invariants

Grâce aux Théorèmes 5.13 et 5.15 et aux coordonnées locales de Bruhat-Hopf de G, on définit les sous-ensembles $\Gamma-$invariants et $\mathfrak{a} \times M_\Gamma-$invariants suivants. Notons π_M la projection $\mathfrak{a} \times M \to M$. L'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow K \\ g &\longmapsto k_I(g) \end{aligned}$$

s'écrit dans les coordonnées locales de Bruhat-Hopf de G au départ et de K à l'arrivée, pour tout $c \in K$, par

$$(\xi, \check{\xi} \; ; \; u)_c \in \mathcal{F}_c^{(2)} \times \mathfrak{a} \times M \longmapsto (\xi \; ; \; \pi_M(u))_c \in \mathcal{F}_c \times M.$$

Donc, en coordonnées globales d'Iwasawa-Hopf,

$$k_I^{-1}(k) = \{k\} \times kN\check{\eta}_0 \times \mathfrak{a}$$

Définition 5.16. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G.*

Notons $\widetilde{\Omega}_G := \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$, le sous-ensemble $\Gamma-$invariant et $AM-$invariant qui se projette sur l'ensemble des chambres de Weyl non divergentes. En coordonnées de Bruhat-Hopf, pour tout $c \in K$, sur la carte $G_c = cN^-MAN$, il s'écrit

$$\widetilde{\Omega}_G \cap G_c = L_c^{(2)}(\Gamma) \times \mathfrak{a} \times M,$$

où $L_c^{(2)}(\Gamma) := L^{(2)}(\Gamma) \cap \mathcal{F}_c^{(2)}$. C'est un ensemble $\Gamma-$invariant et $\mathfrak{a}-$invariant, notons $\Omega_G := \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_G$ son quotient.

Pour tout $m \in M/M_G$, on définit en coordonnées d'Iwasawa-Hopf le sous-ensemble $\Gamma-$invariant par multiplication à gauche et $\mathfrak{a}\times M_\Gamma-$invariant par multiplication à droite

$$\widetilde{\Omega}_{[m]}(\Gamma) := \big(L_{[m]}(\Gamma) \times L_-(\Gamma)\big) \cap \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}.$$

On note $\Omega_{[m]} = \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_{[m]}$ son quotient.

Dans la Proposition qui suit, on donne une condition nécessaire de transitivité topologique des systèmes dynamiques topologiques $(\Omega_{[m]}, \phi_\theta^t)$ avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ régulier.

Proposition 5.17. *Soit G un groupe de Lie, semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe discret, Zariski dense de G. Alors*

(a) on dispose de la partition en sous-ensembles $\Gamma-$invariants à gauche et $\mathfrak{a}\times$ $M_\Gamma-$invariants à droite
$$\widetilde{\Omega}_G = \bigsqcup_{[m]\in M/M_\Gamma} \widetilde{\Omega}_{[m]},$$

(b) si le système dynamique $(\Omega_{[e_M]}, \phi_\theta^t)$ avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ régulier est topologiquement transitif, alors $\theta \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$.

(c) pour tout $[m] \in M/M_\Gamma$, les systèmes dynamiques $(\Omega_{[m]}, \phi_\theta^t)$ et $(\Omega_{[e_M]}, \phi_\theta^t)$ sont conjugués.

Démonstration : Le point (a) est une conséquence du Théorème 5.15 de Guivarc'h-Raugi, puisque l'image réciproque de l'ensemble limite $L_+(\Gamma)$ se partitionne en sous-ensembles $\Gamma-$invariants à gauche et $M_\Gamma-$invariant à droite

$$L_G(\Gamma) = \sqcup_{[m]\in M/M_\Gamma} L_{[m]}(\Gamma).$$

Ensuite, les coordonnées de Bruhat-Hopf permettent d'en déduire la $\Gamma-$invariance à gauche et la $\mathfrak{a} \times M_\Gamma-$invariance à droite des sous-ensembles $\widetilde{\Omega}_{[m]}$.

Pour le point (b), remarquons que si le système dynamique $(\Omega_{[e_M]}, \phi_\theta^t)$ avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ régulier est topologiquement transitif, alors en particulier, il existe une orbite dense dans un plat maximal qui s'écrit en coordonnées $\Gamma.(\xi, \eta\ ;\ \mathfrak{a}, e_M)_c$, avec $(\xi, \eta) \in L^{(2)}(\Gamma) \cap \mathcal{F}_c^{(2)}$. On applique le Théorème 5.2, ce qui permet d'en déduire $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$.

Enfin, pour le point (c), remarquons que pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^+$ et $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $\xi \in cN^-\eta_0 \cap L_+(\Gamma)$ et $(u, m) \in \mathfrak{a} \times M$

$$\phi_\theta^t\big((\xi, \eta\ ;\ u, e_M)_c\big)m = \phi_\theta^t(\xi, \eta\ ;\ u, m)_c.$$

En particulier,

$$\widetilde{\Omega}_{[m]} = \widetilde{\Omega}_{[e_M]}m,$$

ce qui permet d'en déduire que les systèmes dynamiques $(\Omega_{[e_M]}, \phi_\theta^t)$ et $(\Omega_{[m]}, \phi_\theta^t)$ sont conjugués. $\square$

Chapitre 6

Théorèmes de mélange

Donnons la définition de la propriété dynamique au cœur de ce chapitre.

Définition 6.1. *Soit Ω un espace topologique séparé, soit (h_t) un flot agissant sur Ω. On dit que le système dynamique (Ω, h_t) est* topologiquement mélangeant *si pour tous ouverts non vides $U, V \subset \Omega$, il existe un temps $T > 0$ à partir duquel, pour tout $t \geq T$,*

$$U \cap h_t(V) \neq \emptyset.$$

Cette propriété entraîne la transitivité topologique. Soit G un groupe de Lie semisimple, connexe, réel linéaire de type non-compact et soit Γ un sous-groupe discret, Zariski dense de G.

Lorsque Γ est un réseau irréductible de G, d'après le Théorème de Howe-Moore, le système dynamique $(\Gamma\backslash G, \phi_\theta^t)$ est topologiquement mélangeant pour tout $\theta \neq 0$.

On supposera que Γ est de covolume infini. Lorsque G est de rang 1 et Γ est non-élémentaire, rappelons que $\lambda(\Gamma)$ est égal au spectre marqué des longueurs de $\Gamma\backslash G/K$ et l'espace des chambres de Weyl $\Gamma\backslash G/M$ correspond au fibré unitaire tangent $T^1\Gamma\backslash G/K$. Dans le cadre des variétés à courbure strictement négatives majorées par ≤ -1, dont font partie les espaces localement symétriques de rang 1, F. Dal'bo [Dal00] a démontré l'équivalence entre les trois assertions suivantes.

(A) La non-arithméticité du spectre marqué des longueurs.

(B) Le mélange topologique du flot géodésique sur son ensemble non-errant.

(C) L'existence d'une variété fortement stable dense pour le flot géodésique.

Dans toute la suite, on se place en rang quelconque. On va introduire trois propriétés similaires A', B' et C'. On ne démontre cependant pas qu'elles sont équivalentes.

Y. Benoist [Ben00] et I. Kim [Kim06] ont démontré que pour tout sous-semigroupe Γ Zariski dense dans G, le sous-groupe engendré par $\lambda(\Gamma)$ est dense dans $\mathfrak{a}$. On remplace l'assertion (A) par

(A') Γ est un sous-groupe discret, Zariski dense de G, agissant proprement discontinuement sur G/K.

Pour l'analogue de l'assertion (B), on va remplacer le flot géodésique par certain flots directionnels des chambres de Weyl. Compte tenu des Propositions 5.9, 5.17 de transitivité topologique, on ne va considérer que les directions du flot données par les points de l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$. Les résultats principaux de ce chapitre sont les propriétés B' et B" suivantes.

(B') Pour tout $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, le système dynamique (Ω, ϕ_θ^t) est topologiquement mélangeant.

(B") Pour tout $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, le système dynamique $(\Omega_{[e_M]}, \phi_\theta^t)$ est topologiquement mélangeant.

Pour obtenir un analogue de (C), on va étudier l'action de Γ sur G/MN. D'après le chapitre 4, on identifie l'espace homogène G/MN à $\mathcal{F}\times\mathfrak{a}$ par l'application naturellement $G-$équivariante

$$\begin{aligned} G/MN &\longrightarrow \mathcal{F} \times \mathfrak{a} \\ gMN &\longmapsto \big(g\eta_0 \,;\, \sigma(g, \eta_0)\big). \end{aligned}$$

On définit l'ensemble suivant de G/MN,

$$\widetilde{\mathcal{E}}^+ \simeq L_+(\Gamma) \times \mathfrak{a}.$$

La propriété C' constitue le dernier résultat de ce chapitre.

(C') L'action de Γ sur $\widetilde{\mathcal{E}}^+$ est topologiquement transitive.

Dans le premier paragraphe, nous rappelons les résultats classiques de mélange sur les réseaux.

Dans le deuxième paragraphe, on va utiliser le théorème de non-arithméticité d'Y. Benoist (Théorème 6.4) pour prouver la Proposition 6.7, Proposition clé de densité des projections de Jordan d'éléments loxodromiques fortement contractants. La preuve de cette Proposition suit une trame similaire à celle du Théorème 1 de l'article [Ben00]. Les outils sont les mêmes, sauf pour la preuve du Lemme de densité (Lemme 6.5).

Dans le troisième paragraphe, grâce à la Proposition du paragraphe précédent, nous donnons une condition nécessaire et suffisante de mélange topologique des flots directionnels réguliers des chambres de Weyl au théorème 6.9. C'est le thèorème 1.1 de l'article [DG18], mais la preuve donnée ici est différente. Cela entraîne

$$(A') \Longrightarrow (B').$$

Dans le quatrième paragraphe, on applique le Théorème de non-arithméticité d'Y. Guivarc'h et A. Raugi, rappelé au théorème 6.10 : pour tout sous-semigroupe Γ Zariski dense, $\lambda^{ab}(\Gamma)$ engendre un sous-groupe dense dans $\mathfrak{a} \times M_\Gamma^{ab}$ où M_Γ^{ab} est un sous-groupe d'indice fini dans M^{ab}. On prouve une Proposition de décorrélation (Proposition 6.13) dans le cas où M est un sous-groupe (compact) abélien de K.

Dans le cinquième paragraphe, on prouve, dans le Théorème 6.17, sous l'hypothèse que M est abélien, une condition nécessaire et suffisante de mélange topologique des flots $(\phi_\theta^t)_{t\in\mathbb{R}}$ lorsque $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ sur $\Omega_{[e_M]}$. On obtient

$$(A') \Longrightarrow (B'').$$

Dans le sixième paragraphe, on prouve, dans le Théorème 6.20 l'implication

$$(A') \Longrightarrow (C').$$

Le point clé de cette preuve est la Proposition 6.7 de densité des projections de Jordan des éléments loxodromiques fortement contractants.

6.1 Mélange pour les réseaux

Ce paragraphe est basé sur le livre de B. Bekka et M. Mayer [BM00]. Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire. Soit (X, μ) un espace mesuré, où μ est une mesure borélienne de probabilité à support total. On suppose que l'action de G sur X est mesurable, c'est-à-dire que l'application $(g, x) \mapsto gx$ est mesurable et la mesure μ est *quasi-invariante* pour l'action de G i.e. pour tout ensemble A mesurable de X et pour tout $g \in G$,

$$\mu(gA) = 0 \Longleftrightarrow \mu(A) = 0.$$

L'action de G est *ergodique* si tout ensemble mesurable de X invariant par l'action de G est de mesure totale ou nulle i.e. pour tout sous-ensemble $A \subset X$ mesurable et $G-$invariant, alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$.
Notons $L_0^2(X)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable et de moyenne nulle.
On dit que l'action mesurable de G sur l'espace probabilisé (X, μ) est *mélangeante* si pour toutes fonctions $f_1, f_2 \in L_0^2(X)$, la famille de coefficients

$$g \longmapsto \int_X f_1(g^{-1}x) f_2(x) \mathrm{d}\mu(x),$$

converge vers 0 lorsque g sort de tout compact de G. Le Théorème suivant est une conséquence du Théorème plus connu de Howe-Moore.

Théorème 6.2 (Théorème d'ergodicité de Moore)**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire de centre fini. Soit (X, μ) un espace probabilisé sur lequel G agit mesurablement. On suppose que la restriction de cette action à tout facteur simple de type non-compact de G est ergodique. Soit H un sous-groupe de G non relativement compact.*

Alors l'action de H sur X est mélangeante.

Soit Γ un réseau irréductible de G. La mesure de Haar de G, restreinte à un domaine fondamental borélien de l'action de Γ sur G, définit au quotient la mesure $\mu_{\Gamma\backslash G}$ qu'on appelle par abus de langage la mesure de Haar sur $\Gamma\backslash G$. Cette mesure est finie à support total. On la renormalise par son volume, de sorte que $(\Gamma\backslash G, \mu_{\Gamma\backslash G})$ est bien un espace probabilisé. Comme Γ est irréductible, l'action de tout facteur simple de G sur $\Gamma\backslash G$ est bien ergodique. Pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^+$, le sous-groupe à un paramètre de G correspondant est bien d'adhérence non compacte. D'après le Théorème d'ergodicité de Moore, pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^+$ non nul, le système dynamique $(\Gamma\backslash G, \mu_{\Gamma\backslash G}, \phi_t^\theta)$ est mélangeant. Comme la mesure $\mu_{\Gamma\backslash G}$ charge les ouverts, cela entraîne le mélange topologique du système dynamique $(\Gamma\backslash G, \phi_t^\theta)$.

6.2 Non-arithméticité des projections de Jordan

Soit G un groupe de Lie semisimple, connexe, réel linéaire de type non-compact. Pour tout sous-semigroupe Γ de G, on note Γ^{lox} l'ensemble de ses éléments loxodromiques.

Définition 6.3. *Soit Γ un sous-semigroupe de G. On dit que le spectre hyperbolique de Γ est* non-arithmétique*, si le sous-ensemble $\lambda(\Gamma^{lox})$ engendre un sous-groupe additif dense dans $\mathfrak{a}$.*

6.2.1 Théorème de non-arithméticité d'Y. Benoist

Théorème 6.4 ([Ben97b])**.** *Soit G un groupe de Lie semisimple, connexe, réel linéaire et Γ un sous-semigroupe Zariski dense dans G.*

Alors Γ contient des éléments loxodromiques et son spectre hyperbolique est non-arithmétique.

6.2.2 Lemmes de densité

Le Lemme ci-dessous apparaît dans l'article coécrit avec O. Glorieux [DG18].

Lemme 6.5. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie.*

Alors pour tout sous-ensemble $E \subset V$ engendrant un sous-groupe additif dense dans V, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n'importe quelle base $B \subset E$ de V, il existe un sous-ensemble $F_{\varepsilon,B} \subset E$ fini de cardinal au plus $2\dim V$ tel que le sous-groupe additif engendré par $B \cup F$ soit $\varepsilon-$dense dans V.

Démonstration : Par récurrence.

Soit $E \subset \mathbb{R}^1 = V$ un sous-ensemble engendrant un sous-groupe additif dense de $\mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

Soit $x \in E$ un élément non nul, on choisit $B = \{x\}$. Remarquons que tout élément $y \in E$ rationnellement libre avec x engendre avec celui-ci un sous-groupe additif dense dans V.

Supposons maintenant que E ne contienne aucun couple d'éléments rationnellement libres. Considérons le tore $\mathbb{R}/x\mathbb{Z}$ et notons $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/x\mathbb{Z}$ la projection associée. Le sous-ensemble E se projette sur un sous-ensemble infini de $\mathbb{R}/x\mathbb{Z}$, par conséquent, il admet des points d'accumulations. Soient $f_1 \neq f_2 \in E$ deux éléments tels que $|p(f_1) - p(f_2)| < \varepsilon$. Alors le sous-groupe additif $\langle x, f_1, f_2, \rangle$ est $\varepsilon-$dense dans $\mathbb{R}$ et le Lemme est prouvé pour $\dim(V) = 1$, avec $F = \{f_1, f_2\}$.

Considérons maintenant un espace vectoriel réel V de dimension d et E un sous-ensemble de V tel que $\overline{\langle E \rangle} = V$. Fixons une base $B = (b_1, \ldots, b_d) \subset E$ de V et un réel $\varepsilon > 0$.

Supposons qu'il existe $f_1, f_2 \in E$ tels que le sous-groupe additif $\langle f_1, f_2, B\rangle$ contienne un vecteur non nul u de norme $\|u\| \leq \varepsilon/2$. On démontrera d'abord que c'est suffisant pour conclure, ensuite, on démontrera l'existence de tels éléments.

Posons $V' := u^{\perp}$, de sorte qu'on ait la décomposition $V = u \oplus V'$ et notons p' la projection orthogonale d'image V'. Notons $E' = p'(E)$ et considérons B' une base de V' extraite de la famille génératrice $p'(B)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un sous-ensemble fini $F' \subset E'$, contenant au plus $2(d-1)$ éléments, tel que $\langle F', B'\rangle$ engendre un sous-groupe additif $\varepsilon/2-$dense dans V'. Pour tout $f' \in F'$ il existe $f \in E$ et $\lambda_f \in \mathbb{R}$ tel que $f' = f + \lambda_f u$. Notons $\tilde{F}' \subset E$ (resp. $\tilde{B}' \subset B$) un choix de représentants de F' (resp. B'). Prouvons maintenant que

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F}' \cup \tilde{B}' \cup \{f_1, f_2\} \cup B \\ &= \tilde{F}' \cup \{f_1, f_2\} \cup B. \end{aligned}$$

engendre un sous-groupe additif $\varepsilon-$dense de V.

Soit $x \in V$, on décompose $x = x' + \lambda_x u$. Par hypothèse, il existe $(n_{f'})_{f' \in F'} \in \mathbb{Z}^{|F'|}$ et $(n_{b'})_{b' \in B'} \in \mathbb{Z}^{d-1}$ et $\alpha \in V'$, avec $\|\alpha'\| < \epsilon/2$ tels que :

$$x' = \sum_{f' \in F'} n_{f'} f' + \sum_{b' \in B'} n_{b'} b' + \alpha'.$$

Par conséquent,

$$x' = \sum_{f \in \tilde{F}'} n_f f + \sum_{b \in \tilde{B}'} n_b b + \Big(\sum_{f \in \tilde{F}'} n_f \lambda_f + \sum_{b \in \tilde{B}'} n_b \lambda_b\Big) u + \alpha'.$$

Notons
$$k := \Big(\sum_{f\in\tilde{F}'} n_f\lambda_f + \sum_{b\in\tilde{B}'} n_b + \lambda_x\Big)$$
et $[k]\in\mathbb{Z}$ la partie entière de k. On en déduit :
$$x = \sum_{f\in\tilde{F}'} n_f f + \sum_{b\in\tilde{B}'} n_b b + [k]u + (k-[k])u + \alpha'.$$
Le vecteur $\sum_{f\in\tilde{F}'} n_f f + \sum_{b\in\tilde{B}'} n_b b + [k]u$ est bien dans le sous-groupe engendré par $F\cup B$ et par inégalité triangulaire, $|(k-[k])u+\alpha|\leq\varepsilon$. Ainsi, $F = \tilde{F}\cup\{f_1,f_2\}\cup B$ engendre un sous-groupe additif $\varepsilon-$dense de V.

Démontrons maintenant que pour tout $\epsilon>0$, il existe $f_1,f_2\in E$ tels que le sous-groupe additif $\langle f_1,f_2,B\rangle$ contienne un vecteur non nul de norme inférieur à ϵ.

Considérons la projection $p:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d/\oplus_{k=1}^d\mathbb{Z}b_k$ à image dans le tore $\mathbb{R}^d/\oplus_{k=1}^d\mathbb{Z}b_k$. S'il existe un élément $f\in E$ tel que $p(\mathbb{Z}f)$ contienne un point d'accumulation, alors on choisit u, non nul et très petit dans $\langle B,f\rangle$. Supposons maintenant qu'on ne puisse pas trouver un tel élément dans E. Choisissons un entier N assez grand de sorte que $N>\frac{2\sqrt{d}}{\epsilon}$. Appliquons le principe des tiroirs sur N^d+1 éléments distincts de E. On en déduit l'existence de $f_1,f_2\in E$ tels que
$$0<|p(f_1-f_2)|<\frac{2\sqrt{d}}{N}<\epsilon.$$
Choisissons maintenant pour u l'unique représentant de la projection $p(f_1-f_2)$ dans le domaine fondamental $\sum_{i=1}^d(0,1]b_i$. C'est bien un élément du sous-groupe additif $\langle f_1,f_2,B\rangle$ de norme au plus ϵ. □

Lemme 6.6. *Soient C un groupe de Lie compact abélien connexe réel linéaire, V un espace vectoriel réel de dimension finie et $\varepsilon>0$ un réel.*

*Alors pour tout sous-ensemble fini $F\subset V\times C$ engendrant un sous-groupe $\varepsilon-$dense dans $V\times C$, il existe un élément $v_F\in V$ tel que le sous-*semigroupe *engendré par F est $\varepsilon-$dense dans*
$$\Big(v_F+\sum_{f\in F}\mathbb{R}_+\pi_V(f)\Big)\times C.$$

Démonstration : On s'inspire de la preuve d'Y. Benoist du Lemme 6.2 [Ben00].

Considérons le sous-ensemble compact
$$\widetilde{K} := \Big\{\sum_{f\in F} t_f\pi_V(f)\ \Big|\ 0\leq t_f\leq 1\Big\}.$$
Alors $\widetilde{K}\times C$ est un sous-ensemble compact de $V\times C$. Comme le sous-groupe additif engendré par F est $\varepsilon-$dense dans $V\times C$, alors par compacité, il existe un sous-ensemble fini D du sous-groupe additif $\langle F\rangle$ qui $\varepsilon-$recouvre $\widetilde{K}\times C$, i.e. tel que
$$\widetilde{K}\times C\subset\bigcup_{x\in D}B(x,\varepsilon).$$

Notons $\langle F\rangle_+$ le sous-semigroupe engendré par F. Choisissons un élément h du sous-semigroupe engendré par F tel que hD est dans $\langle F\rangle_+$. Un tel choix est possible car $V\times C$ est abélien.

Alors le translaté $h(\widetilde{K}\times C)$ est $\varepsilon-$recouvert par $hD \subset \langle F\rangle_+$, i.e.

$$h(\widetilde{K}\times C) \;\subset\; \bigcup_{x\in D} B(hx,\varepsilon) \;\subset\; \bigcup_{x\in\langle F\rangle_+} B(x,\varepsilon).$$

Remarquons que

$$h(\widetilde{K}\times C) = (\pi_V(h)+\widetilde{K})\times \pi_C(h)C = (\pi_V(h)+\widetilde{K})\times C.$$

De plus, en multipliant par le sous-semigroupe engendré par F et en notant le cône $L := \sum_{f\in F}\mathbb{R}_+\pi_V(f)$ on en déduit

$$\langle F\rangle_+\big((\pi_V(h)+\widetilde{K})\times C\big) = \big((\pi_V(h)+L)\times C\big).$$

D'où le fait que le sous-semigroupe $\langle F\rangle_+$ est bien $\varepsilon-$dense dans $\big((\pi_V(h)+L)\times C\big)$ i.e.

$$\big((\pi_V(h)+L)\times C\big) \subset \bigcup_{x\in\langle F\rangle_+} B(x,\varepsilon).$$

□

6.2.3 Densité des projections de Jordan d'éléments loxodromiques

Proposition 6.7. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense dans G.*

Alors pour tout $\theta \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$ de l'intérieur du cône limite, pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}^{(2)} \subset L^{(2)}(\Gamma)$, il existe

(1) un réel $r_0 := r_0(\mathcal{U}^{(2)},\theta) \in]0,1[$,

(2) un sous-cône $\mathcal{C}_\theta \subset \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$, convexe, fermé, d'intérieur non vide, tel que $\theta \in \mathring{\mathcal{C}}_\theta$,

tels que pour tout $r \in]0,r_0]$ pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_\delta \in]0,r]$ tel que

$$(3\dim\mathfrak{a}+2)\sup(C_{r,\varepsilon_\delta}, C_{2r,2\varepsilon_\delta}) \le \delta/4,$$

et il existe un vecteur $v_\delta \in \mathfrak{a}^+$ tel que pour tout point $y \in v_\delta + \mathcal{C}_\theta$, il existe un élément $\gamma_y \in \Gamma$, loxodromique, vérifiant

(a) γ_y est $(2r,2\varepsilon_\delta)-$loxodromique et

$$B(\gamma_y^+,2\varepsilon_\delta)\times B(\gamma_y^-,2\varepsilon_\delta) \subset \mathcal{U}_+\times\mathcal{U}_-,$$

(b) $\lambda(\gamma_y) \in B(y,\delta)$,

(c) pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{12r}(\mathcal{X}(\gamma_y^-))^{\complement}$ et pour tout $\xi' \in B(\xi,2\varepsilon_\delta)$ et tout $m \ge 1$

$$\|\sigma(\gamma_y^m,\xi') - m\lambda(\gamma_y) - \nu(\gamma_y,\xi)\| \le 2C_{2r,2\varepsilon_\delta} \le \frac{\delta}{6\dim\mathfrak{a}+4}.$$

Démonstration : Soient θ un point de l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$ et un ouvert non vide $\mathcal{U}^{(2)} = \mathcal{U}^+\times\mathcal{U}^- \subset L^{(2)}(\Gamma)$.

Appliquons d'abord le Lemme 3.23 à θ dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$. Il existe

- un ensemble fini $S \subset \Gamma$,

- un réel strictement positif $\rho_0 > 0$,
- une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n+\infty} \epsilon_n = 0$,

tels que,

(*) pour tout $\rho \in]0, \rho_0]$ il existe un rang $N_\rho \geq 1$ à partir duquel, la famille $S_n := (\gamma^n)_{\gamma \in S} \subset \Gamma$ engendre un sous-semigroupe fortement $(\rho, \epsilon_n)-$Schottky Zariski dense dans G,

(**) $\lambda(S)$ est une base de $\mathfrak{a}$,

(***) θ est dans l'intérieur du cône convexe $C(\lambda(S)) := \sum_{\gamma \in S} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)$.

Numérotons les éléments de S, i.e. $S = (\gamma_1, ..., \gamma_{r_G})$. Pour tout $n \geq 1$, notons Γ_n le semigroupe fortement $(\rho, \epsilon_n)-$Schottky engendré par S_n.

D'après le Lemme 5.6 de densité des points fixes attractifs et répulsifs dans $L^{(2)}(\Gamma)$, il existe $h \in \Gamma^{lox}$ loxodromique tel que $(h^+, h^-) \in \mathcal{U}^{(2)}$ et (h^+, γ_1^-) et $(\gamma_{r_G}^+, h^-) \in \mathcal{F}^{(2)}$ soient des couples de points transverses.

Posons

$$\begin{cases} r_0 & := & \inf\left(\rho_0, \frac{1}{6} d(h^+, \mathcal{X}(h^-)), \frac{1}{6} d(\gamma_{r_G}^+, \mathcal{X}(h^-)), \frac{1}{6} d(h^+, \mathcal{X}(\gamma_1^-))\right) \\ \mathcal{C}_\theta & := & C(\lambda(S)) = \sum_{g \in S} \mathbb{R}_+ \lambda(g). \end{cases}$$

Par choix de $h \in \Gamma^{lox}$, le point (1) est bien vérifié : $r_0 \in]0, 1[$. Par construction de S, on déduit le point (2), puisque

$$\theta \in \overset{\circ}{C}(\lambda(S)) = \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta.$$

Soit $r \leq r_0$. D'après le Lemme 2.65, la famille de constantes $(C_{r,\varepsilon})_{\varepsilon \in]0,r]}$ converge vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$. Donc pour tout $\delta > 0$, il existe $0 < \varepsilon_\delta \leq r$ assez petit tel que

$$\begin{cases} (3r_G + 2) \sup(C_{r,\varepsilon_\delta}, C_{2r,2\varepsilon_\delta}) \leq \delta/4 \\ \quad B(h^+, 3\varepsilon_\delta) \times B(h^-, 3\varepsilon_\delta) \subset \mathcal{U}^{(2)}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Fixons un tel $\varepsilon_\delta \in]0, r]$.

Choisissons maintenant $v \in \mathfrak{a}^+$. D'après le Lemme 2.58, il existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\delta$, les éléments de $\{h^n\} \cup S_n$ soient $(r, \varepsilon_\delta)-$loxodromiques.
Fixons un tel entier $n \geq N_\delta$.

D'après la Proposition 6.4, le sous-groupe engendré par $\lambda(\Gamma_n)$ est dense dans $\mathfrak{a}$. Appliquons le Lemme de densité 6.5 à $\lambda(\Gamma_n)$: il existe donc $F \subset \Gamma_n$ fini tel que $\lambda(S_n) \cup \lambda(F)$ contienne $l \leq 3r_G$ éléments et engendre un sous-groupe additif $\delta/2-$dense dans $\mathfrak{a}$. Réordonnons $S_n \cup F = (g_1, ..., g_l)$ en fixant le premier élément $g_1 = \gamma_1^n$ et le dernier $g_l = \gamma_{r_G}^n$. Or

$$\mathcal{C}_\theta = C(\lambda(S)) \subset C(\lambda(S_n \cup F)) := \sum_{i=1}^{l} \mathbb{R}_+ \lambda(g_i).$$

D'après le Lemme 6.6 de densité, il existe $u_\delta \in \mathfrak{a}^+$ tel que l'ensemble des points entiers

$$\sum_{i=1}^{l} \mathbb{N}^* \lambda(g_i)$$

soit $\delta/2-$dense dans $u_\delta + \mathcal{C}_\theta$. Posons

$$\begin{cases} \nu & := & \nu(h, g_l^+) + \sum_{i=2}^l \nu(g_i, g_{i-1}^+) + \nu(g_1, h^+) \\ v_\delta & := & u_\delta + \nu + 2\lambda(h^n). \end{cases}$$

On applique maintenant la Proposition 2.66 aux éléments du sous-ensemble

$$\{h^n g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} h^n \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}.$$

Soit w un élément de ce sous-ensemble. Alors d'après la Proposition 2.66, l'élément w est $(2r, 2\varepsilon_\delta)-$loxodromique. De plus,

$$w^+ \subset B(h^+, \varepsilon_\delta) \text{ et } \mathcal{X}(w^-) \subset \mathcal{V}_{\varepsilon_\delta}(\mathcal{X}(h^-)).$$

Or par choix de ε_δ,

$$B(h^+, 3\varepsilon_\delta) \times B(h^-, 3\varepsilon_\delta) \subset \mathcal{U}_+ \times \mathcal{U}_-,$$

on en déduit le point (a) pour tout $w \in \{h^n g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} h^n \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}$,

$$B(w^+, 2\varepsilon_\delta) \times B(w^-, 2\varepsilon_\delta) \subset \mathcal{U}^{(2)}.$$

Pour le point (b), on pose (comme $\nu(h, h^+) = 0$) Appliquons la Proposition 2.66, pour tout $n_1, ..., n_l \geq 1$,

$$\left\| \lambda(h^n g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} h^n) - \nu - 2\lambda(h^n) - \sum_{i=1}^{l} n_i \lambda(g_i) \right\| \leq (l+2) 2C_{r, \varepsilon_\delta} \leq \delta/2.$$

Donc l'ensemble

$$\lambda\Big(\{h^n g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} h^n \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}\Big)$$

est $\delta/2-$dense dans

$$\nu + 2\lambda(h^n) + \sum_{i=1}^{l} \mathbb{N}^* \lambda(g_i).$$

Or $\sum_{i=1}^l \mathbb{N}^* \lambda(g_i)$ est $\delta/2-$dense dans $u_\delta + \mathcal{C}_\theta$. On en déduit que l'ensemble

$$\lambda\Big(\{h^n g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} h^n \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}\Big)$$

est $\delta-$dense dans

$$\nu + 2\lambda(h^n) + u_\delta + \mathcal{C}_\theta = v_\delta + \mathcal{C}_\theta.$$

Ainsi, pour tout $y \in v_\delta + \mathcal{C}_\theta$, il existe au moins un élément

$$\gamma_y \in \{h^n g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} h^n \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}$$

vérifiant les points (a) et (b).

Enfin, vérifions le point (c), appliquons le Lemme 2.65 (ii) et (iii), à l'élément $(2r, 2\varepsilon_\delta)-$loxodromique γ_y. Pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{12r}(\mathcal{X}(g^-))^\complement$, tout $\xi' \in B(\xi, 2\varepsilon_\delta)$ et tout $m \geq 1$,

$$\|\sigma(\gamma_y^m, \xi') - m\lambda(\gamma_y) - \nu(\gamma_y, \xi)\| \leq 2C_{2r, 2\varepsilon_\delta}.$$

Or

$$(3r_G + 2) C_{2r, 2\varepsilon_\delta} \leq \frac{\delta}{4},$$

d'où

$$2C_{2r, 2\varepsilon_\eta} \leq \frac{\delta}{6 \dim \mathfrak{a} + 4}.$$

On en déduit que γ_y vérifie le point (c). $\square$

Corollaire 6.8. *Soit G un groupe de Lie semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact et Γ un sous-groupe Zariski dense discret de G. Soit $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ un point de l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.*

Alors pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}^{(2)} \subset L^{(2)}(\Gamma)$, pour tout $x \in \mathfrak{a}$ et $\delta > 0$ il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ il existe un élément loxodromique $\gamma_t \in \Gamma$ vérifiant

$$\begin{cases} (\gamma_t^+, \gamma_t^-) \in \mathcal{U}^{(2)} \\ \quad \lambda(\gamma_t) \in B(x + t\theta, \delta) \end{cases} \tag{6.2}$$

Preuve : C'est une conséquence de la Proposition 6.7.

En effet, pour tout $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$ une direction de l'intérieur du cône limite, pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}^{(2)} \subset L^{(2)}(\Gamma)$, il existe

(1) un réel $r_0 := r_0(\mathcal{U}^{(2)}, \theta) \in]0, 1[$,

(2) un sous-cône $\mathcal{C}_\theta \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, convexe, fermé, d'intérieur non vide, tel que $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta$,

tels que pour tout $r \in]0, r_0]$ pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon_\delta \in]0, r]$ et un vecteur $v \in \mathfrak{a}^+$ tels que pour tout point $y \in v + \mathcal{C}_\theta$, il existe un élément $\gamma_y \in \Gamma$, loxodromique, vérifiant

(a) $B(\gamma_y^+, 2\varepsilon_\delta) \times B(\gamma_y^-, 2\varepsilon_\delta) \in \mathcal{U}^{(2)}$,

(b) $\lambda(\gamma_y) \in B(y, \delta)$.

En particulier, comme θ est un point de l'intérieur du cône $\mathcal{C}_\theta$, pour tout $x \in \mathfrak{a}$, il existe $T > 0$ tel que l'intersection

$$x + \mathbb{R}_+\theta \cap \big(v + \mathcal{C}_\theta\big)$$

contienne la demi-droite $x + [T, +\infty[\theta$. On applique les points (a) et (b) sur cette demi-droite pour trouver le système (6.2). □

6.3 Mélange topologique du flot des chambres de Weyl

Théorème 6.9 ([DG18]). *Soit G un groupe de Lie semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact et Γ un sous-groupe Zariski dense discret de G. Soit $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.*

Alors le système dynamique topologique (Ω, ϕ_t^θ) est topologiquement mélangeant si et seulement si θ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Preuve du Théorème 6.9 : Supposons que le système dynamique (Ω, ϕ_t^θ) est topologiquement mélangeant, avec $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$. En particulier ce système dynamique est topologiquement transitif. Par conséquent, d'après la Proposition 5.9 la direction θ est dans l'intérieur du cône limite.

Prouvons maintenant la réciproque : si $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++}$, alors (Ω, ϕ_t^θ) est topologiquement mélangeant. On utilise le Corollaire 6.8 et le Théorème 5.8 de transitivité de l'action de Γ sur $L^{(2)}(\Gamma)$.

Soient $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ deux ouverts non vides de $\widetilde{\Omega}$. Sans pertes de généralités, on suppose que ces ouverts s'écrivent en coordonnées de Hopf

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\widetilde{U}) &= \mathcal{U}^{(2)} \times B(u, \delta) \\ \mathcal{H}(\widetilde{V}) &= \mathcal{V}^{(2)} \times B(v, \delta). \end{cases}$$

où $\mathcal{U}^{(2)}$ et $\mathcal{V}^{(2)}$ sont des ouverts non vides de $L^{(2)}(\Gamma)$ et $B(u, \delta), B(v, \delta)$ des boules ouvertes de $\mathfrak{a}$ de rayon $\delta > 0$.

Pour tout $g \in \Gamma$, lisons en coordonnées de Hopf l'image de l'ouvert $g\widetilde{U}$,

$$\mathcal{H}(g\widetilde{U}) = g\big(\mathcal{U}^{(2)} \times B(u,\delta)\big) \subset g\mathcal{U}^{(2)} \ \times \mathfrak{a}.$$

Utilisons le Théorème 5.8 de transitivité de l'action de Γ sur

$$L^{(2)}(\Gamma) \subset \mathcal{F}^{(2)} \simeq G/AM$$

pour se ramener à l'énoncé du Corollaire 6.8. Il existe $g \in \Gamma$ tel que

$$g\mathcal{U}^{(2)} \cap \mathcal{V}^{(2)} \neq \emptyset.$$

Choisissons un tel élément $g \in \Gamma$. Puisque le sous-ensemble $g\mathcal{U}^{(2)} \cap \mathcal{V}^{(2)}$ est un ouvert non vide de $L^{(2)}(\Gamma)$, on considère un ouvert non vide

$$\mathcal{O}^{(2)} := \mathcal{O}_+ \times \mathcal{O}_- \subset g\mathcal{U}^{(2)} \cap \mathcal{V}^{(2)}.$$

Passons des coordonnées de G/AM, en coordonnées de Hopf de G/M :

$$\mathcal{O}^{(2)} \times \mathfrak{a} \subset \big(g\mathcal{U}^{(2)} \cap \mathcal{V}^{(2)}\big) \times \mathfrak{a}.$$

On en déduit que

$$\big(\mathcal{O}^{(2)} \times \mathfrak{a}\big) \cap g\big(\mathcal{U}^{(2)} \times B(u,\delta)\big)$$

est un ouvert non vide de G/M en coordonnées de Hopf. Il contient donc un ouvert non vide de la forme

$$\mathcal{O}'^{(2)} \times B(u',\delta')$$

avec $\mathcal{O}'^{(2)} := \mathcal{O}'_+ \times \mathcal{O}'_- \subset \mathcal{O}^{(2)}$ et $u' \in \mathfrak{a}$ et $\delta' > 0$.

Notons $\delta'' := \min(\delta,\delta')$. Appliquons maintenant le Corollaire 6.8 à l'ouvert non vide $\mathcal{O}'^{(2)} \subset L^{(2)}(\Gamma)$, au point $x = v - u' \in \mathfrak{a}$ et au réel $\delta'' > 0$. Il existe alors $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$, loxodromique, vérifiant

$$\begin{cases} (\gamma_t^+, \gamma_t^-) \in \mathcal{O}'^{(2)} \\ \quad \lambda(\gamma_t) \in B(v - u' + t\theta, \delta''). \end{cases} \tag{6.3}$$

Pour tout $t \geq T$, écrivons en coordonnées l'action de γ_t sur l'élément $(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u')$.

$$\gamma_t\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big) = \big(\gamma_t\gamma_t^+, \gamma_t\gamma_t^- \ ; \ u' + \sigma(\gamma_t, \gamma_t^+)\big).$$

Or tout élément loxodromique $\gamma \in \Gamma$ fixe ses points attractifs et répulsifs (γ^+, γ^-). De plus, d'après le Fait 2.54, $\lambda(\gamma) = \sigma(\gamma, \gamma^+)$. Donc pour tout $t \geq T$,

$$\gamma_t\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big) = \big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u' + \lambda(\gamma_t)\big).$$

Or $\lambda(\gamma_t) \in B(v - u' + t\theta, \delta'')$, donc $u' + \lambda(\gamma_t) \in B(v + t\theta, \delta'')$.
Puisque $(\gamma_t^+, \gamma_t^-) \in \mathcal{O}'^{(2)}$, on en déduit que

$$\gamma_t\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big) \in \mathcal{O}'^{(2)} \times B(v + t\theta, \delta'').$$

On reconnaît à droite l'image de l'action de $\mathcal{O}'^{(2)} \times B(v,\delta'')$ par ϕ_θ^t. D'où pour tout $t \geq T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma^{lox}$ tel que

$$\gamma_t\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big) \in \phi_\theta^t\big(\mathcal{O}'^{(2)} \times B(v,\delta'')\big).$$

Comme $\mathcal{O}'^{(2)} \subset g\mathcal{U}^{(2)} \cap \mathcal{V}^{(2)}$, en particulier

$$\mathcal{O}'^{(2)} \times B(v, \delta'') \subset \big(g\mathcal{U}^{(2)} \cap \mathcal{V}^{(2)}\big) \times B(v, \delta'').$$

On en déduit d'une part que

$$\gamma_t\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big) \in \phi_\theta^t\big(\mathcal{V}^{(2)} \times B(v, \delta'')\big) \subset \phi_\theta^t\big(\mathcal{H}(\widetilde{V})\big). \tag{6.4}$$

Or par choix de l'ouvert $\mathcal{O}'^{(2)}$ et du point u'

$$\mathcal{O}'^{(2)} \times B(u', \delta'') \subset g\big(\mathcal{U}^{(2)} \times B(u, \delta)\big).$$

D'où

$$\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big) \in g\big(\mathcal{U}^{(2)} \times B(u, \delta)\big).$$

Ainsi, on en déduit d'autre part

$$\gamma_t\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big) \in \gamma_t g\big(\mathcal{U}^{(2)} \times B(u, \delta)\big) = \gamma_t g \mathcal{H}(\widetilde{U}). \tag{6.5}$$

D'après les équations (6.4) et (6.5), pour tout $t \geq T$, en coordonnées de Hopf, les ouverts

$$\phi_\theta^t(\widetilde{V}) \text{ et } \gamma_t g \widetilde{U}$$

contiennent tous les deux le point de coordonnées $\gamma_t\big(\gamma_t^+, \gamma_t^- \ ; \ u'\big)$. D'où,

$$\gamma_t g \tilde{U} \cap \phi_t^\theta(\tilde{V}) \neq \emptyset.$$

On a donc démontré que ϕ_t^θ est topologiquement mélangeant. □

6.4 Théorème de non-arithméticité d'Y. Guivarc'h et A. Raugi

Notons $\pi_{M^{ab}} : \mathfrak{a} \times M^{ab} \to M^{ab}$ la projection naturelle et $\pi_{ab} : M \to M^{ab}$ le morphisme de groupe. On renvoie le lecteur à la Définition 5.11 pour la définition de la projection de Jordan généralisée abélienne $\lambda^{ab} : G^{lox} \longrightarrow \mathfrak{a} \times M^{ab}$.

Pour tout sous-semigroupe de G, les sous-groupes fermés de $\mathfrak{a}$ et M et M^{ab} contenant les informations sur les parties hyperboliques et elliptiques de ses éléments loxodromiques sont définis comme suit

- $M_\Gamma^{ab} := \pi_{M^{ab}}\Big(\overline{\langle \lambda^{ab}(\Gamma^{lox}) \rangle} \Big)$,
- $M_\Gamma := \pi_{ab}^{-1}\big(M_\Gamma^{ab} \big)$.

Le Théorème suivant, de Guivarc'h-Raugi [GR07, Thm 1] généralise dans $\mathfrak{a} \times M^{ab}$, un Théorème d'Y. Benoist (Théorème 6.4) de non-arithméticité du spectre hyperbolique des sous-(semi)groupes Zariski denses.

Théorème 6.10 (Guivarc'h-Raugi [GR07] Théorème 6.4). *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact.*

Alors pour tout sous-semigroupe Γ Zariski dense dans G, le sous-groupe $\overline{\langle \lambda^{ab}(\Gamma^{lox}) \rangle}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{a} \times M^{ab}$.

Corollaire 6.11. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact.*

Alors pour tout sous-semigroupe Γ Zariski dense dans G,

$$\overline{\langle\lambda^{ab}(\Gamma^{lox})\rangle} = \mathfrak{a} \times M_\Gamma^{ab},$$

et M_Γ^{ab} est un sous-groupe d'indice fini de M^{ab}, contenant la composante connexe de l'identité de M^{ab}.

Preuve : Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Notons

$$H := \overline{\langle\lambda^{ab}(\Gamma)\rangle} \subset \mathfrak{a} \times M^{ab}.$$

Comme H est fermée, $\mathfrak{a} \times M^{ab}/H$ est séparée. D'après le Théorème précédent de non-arithméticité (Théorème 6.10), ce sous-groupe quotient est fini. Ainsi, pour la topologie discrète à l'arrivée, le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{a} &\longrightarrow \mathfrak{a} \times M^{ab}/H \\ x &\longmapsto (x, e)H \end{aligned}$$

est continu à valeurs dans un groupe fini. Comme $\mathfrak{a}$ est connexe, l'application φ est donc constante $\varphi = (0, e)H$. On en déduit $\mathfrak{a} \times \{e\} \subset H$.

Clairement $H \subset \mathfrak{a} \times M_\Gamma^{ab}$. Réciproquement, soit $(x, m) \in \mathfrak{a} \times M_\Gamma^{ab}$. Par définition de M_Γ^{ab}, il existe $y \in \mathfrak{a}$ tel que $(y, m) \in H$. Donc

$$(x, m) = (y, m)(x - y, e).$$

Comme $(x - y, e) \in \mathfrak{a} \times \{e\} \subset H$, on en déduit que $(x, m) \in H$. D'où

$$H = \mathfrak{a} \times M_\Gamma^{ab}.$$

□

6.4.1 Lemme de densité

On s'intéresse aux cas où M est abélien. D'après le Corollaire 3.7 du livre [BtD85], le sous-groupe M est isomorphe au produit d'un tore et d'un sous-groupe abélien fini. Pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ou encore pour $\mathrm{SO}(p, p+2)^0$, le sous-groupe M est abélien connexe, isomorphe à $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. Pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, le sous-groupe M est isomorphe au sous-groupe abélien discret $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$.

Lemme 6.12. *Soit C un groupe de Lie compact, abélien, connexe, réel linéaire et soit V un espace vectoriel réel de dimension finie.*

Alors pour tout sous-ensemble $E \subset V \times C$ engendrant un sous-groupe dense dans $V \times C$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $F_\varepsilon \subset E$ fini de cardinal au plus $3 \dim V + 2 \dim C$, tel que le sous-groupe engendré par F est $\varepsilon-$dense dans $V \times C$.

Démonstration. Ce Lemme est une conséquence du Lemme 6.5 de densité précédent. D'après le Corollaire 3.7 du livre [BtD85], le sous-groupe C est isomorphe à un tore. Donc son revêtement universel $\tilde{C}$ est un espace vectoriel réel de dimension $\dim(\tilde{C}) = \dim(C)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Notons $\widetilde{V} = V \times \tilde{C}$ le revêtement universel de $V \times C$. C'est un espace vectoriel réel de dimension $\tilde{d} = d + \dim C$. Notons $p : \widetilde{V} \to V \times C$ le revêtement. Soit $(b_1, ..., b_d, b_{d+1}, ..., b_{\tilde{d}})$ une base de $\widetilde{V}$ telle que $(p(b_1), ..., p(b_d))$ soit une base de $V \times \{0\}$

et le sous-groupe additif engendré par $(b_{d+1}, ..., b_{\tilde{d}})$ soit le noyau du revêtement $\ker(p)$. Cela revient à écrire l'isomorphisme entre $\widetilde{V}/\langle b_{d+1}, ..., b_{\tilde{d}}\rangle$ et $V \times C$.

Remarquons que le sous-ensemble

$$\widetilde{\mathcal{D}} := Vect(b_1, ..., b_d) \times \left(\prod_{j=1}^{\dim C} [0, 1[b_{d+j} \right)$$

est un domaine fondamental pour le revêtement p. Considérons alors la famille $\widetilde{E}$ des relevés des éléments de E dans ce domaine fondamental

$$\widetilde{E} := p^{-1}(E) \cap \widetilde{\mathcal{D}}.$$

On en déduit alors que $\widetilde{E} \cup \{b_{d+1}, ..., b_{\tilde{d}}\}$ engendre un sous-groupe additif dense de $\widetilde{V}$. Considérons un sous-ensemble $B' \subset \widetilde{E}$ tel que $\pi_V(p(B'))$ est une base de V. Appliquons le Lemme 6.5 de densité sur $\widetilde{V}$, pour le sous-ensemble $\widetilde{E} \cup \{b_{d+1}, ..., b_{\tilde{d}}\}$ avec la base $B' \cup \{b_{d+1}, ..., b_{\tilde{d}}\}$. Il existe alors un sous-ensemble $\widetilde{F} \subset \widetilde{E}$ contenant au plus $2\tilde{d}$ éléments tel que le sous-ensemble fini $\widetilde{F} \cup B' \cup \{b_{d+1}, ..., b_{\tilde{d}}\}$ engendre un sous-groupe additif $\varepsilon-$dense dans $\widetilde{V}$.

Enfin, prenons l'image par le revêtement p. On en déduit que $p(\widetilde{F} \cup B') \subset E$ est un sous-ensemble fini contenant au plus $3d + 2\dim C$ éléments et engendre un sous-groupe additif $\varepsilon-$dense dans $V \times C$. □

6.4.2 Proposition de décorrélation

Dans cette partie, on va prouver la Proposition suivante. On va ensuite la combiner au Corollaire 6.8 pour obtenir le mélange topologique sur $\Gamma\backslash G$.

Proposition 6.13. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. On suppose que M est abélien. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense dans G.*

Alors il existe

(i) un couple de points transverses $(\xi_1, \check{\xi}_1) \in L^{(2)}(\Gamma)$,

(ii) un réel strictement positif

$$0 < r_1 \leq \frac{1}{6} \mathrm{d}(\xi_1, \mathcal{X}(\check{\xi}_1)),$$

(iii) une famille de réels strictement positifs $(\varepsilon_{r,\delta})_{r\in]0,r_1],\, \delta>0}$ telle que pour $r \in]0, r_1]$ fixé,

$$\lim_{\delta\to 0} \varepsilon_{r,\delta} = 0,$$

et pour tous $\delta > 0$ et $r \in]0, r_1]$, pour tout $c_1, \check{c}_1 \in K$ tels que

$$B(\xi_1, r) \subset \mathcal{F}_{c_1} \text{ et } \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_1))^{\complement} \subset \mathcal{F}_{\check{c}_1},$$

il existe une famille finie $(\gamma_i)_{i\in I} \subset \Gamma$ et un point $x_\delta \in \mathfrak{a}$ vérifiant les deux conditions suivantes.

† *Pour tout $i \in I$, l'élément γ_i est $(r, \varepsilon_{r,\delta})-$loxodromique avec*

$$(\gamma_i^+, \gamma_i^-) \in B(\xi_1, \varepsilon_{r,\delta}) \times B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta}).$$

‡ *Pour tout* $\xi \in \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_1))^{\complement}$ *et* $(\xi_i)_{i\in I} \subset B(\xi, \varepsilon_{r,\delta})$,

$$\{x_\delta + \nu(\check{\xi}_1; \xi_1, \xi)\} \times M_\Gamma \subset \cup_{i\in I} B(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i, \xi_i), \delta).$$

On utilise les deux Lemmes suivants. Le premier traite de la densité des projections de Jordan généralisées dans une des composantes connexes $\mathfrak{a}\times mM_0$ de $\mathfrak{a}\times M_\Gamma$, lorsque M_0 est abélien.

Lemme 6.14. *Soit G un groupe de Lie connexe semisimple réel linéaire de type non-compact. On suppose que M est abélien. Soit Γ un sous-semigroupe Zariski dense dans G.*

Alors il existe

(a) un cône convexe d'intérieur non vide $\mathcal{C}_0$,

(b) un couple de points transverses $(\xi_0, \check{\xi}_0) \in L^{(2)}(\Gamma)$,

(c) un réel $r_0 > 0$ et une famille de réels strictement positifs $(\varepsilon_{r,\delta})_{r\in]0,r_0],\,\delta>0}$ telle que pour $r \in]0, r_0]$ fixé,

$$\begin{cases} \lim_{\delta\to 0} \varepsilon_{r,\delta} & = & 0 \\ 4(4\dim\mathfrak{a} + 2\dim M_0)C_{r,\varepsilon_{r,\delta}} & \leq & \delta \end{cases}$$

tels que pour tous $\delta > 0$ et $r \in]0, r_0]$,
il existe un sous-ensemble non vide $F_\delta \subset \Gamma$ et $(x_\delta, m_\delta) \in \mathfrak{a} \times M_\Gamma$ vérifiant les quatre points suivants.

♡ *F_δ est fini de cardinal $l \leq 4\dim\mathfrak{a} + 2\dim M_0$.*

♣ *F_δ est inclus dans un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon_{r,\delta})-$Schottky Zariski dense dans G.*

♢ *Il existe un ordre de $F_\delta = (g_1, ..., g_l)$ tel que $g_1^- = \check{\xi}_0$ et $g_l^+ = \xi_0$, en particulier pour tout $w = g_l^{n_l}...g_1^{n_1}$ avec $n_1, ..., n_l \geq 1$,*

$$w^+ \in B(\xi_0, \varepsilon_{r,\delta}) \text{ et } w^- \in B(\check{\xi}_0, \varepsilon_{r,\delta}).$$

♠ *Pour un tel ordre de F_δ, l'ensemble*

$$\lambda^{ab}\big(\{g_l^{n_l}...g_1^{n_1} \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}\big)$$

est $\delta-$dense dans $\{x_\delta + \mathcal{C}_0\} \times m_\delta^M M_0$.

Preuve : Appliquons d'abord le Lemme 3.23. Fixons θ dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$. Ce Lemme permet de se donner

- un ensemble fini $S \subset \Gamma$,
- un réel strictement positif $r_0 > 0$,
- une suite de réels strictement positifs $\varepsilon_n \underset{+\infty}{\to} 0$,

tels que,

(i) pour tout $r \in]0, r_0]$ il existe un rang $N_r \geq 1$ à partir duquel, la famille $S_n := (\gamma^n)_{\gamma\in S} \subset \Gamma$ engendre un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon_n)-$Schottky Zariski dense dans G,

(ii) $\lambda(S)$ est une base de $\mathfrak{a}$,

(iii) θ est dans l'intérieur du cône convexe $C(\lambda(S)) := \sum_{\gamma \in S} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)$.

D'après le point (iii), le cône

$$\mathcal{C}_0 := \sum_{\gamma \in S} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)$$

est bien convexe d'intérieur non vide. Notons $S = (\gamma_1, ..., \gamma_{r_G})$. D'après le point (i), comme S engendre un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon_n)-$Schottky Zariski dense dans Γ, en particulier, $\gamma_{r_G}^+$ est dans le bassin d'attraction de γ_1. Autrement dit, le couple de point $(\gamma_{r_G}^+, \gamma_1^-)$ est bien en position générale. D'où

$$(\gamma_{r_G}^+, \gamma_1^-) \in L^{(2)}(\Gamma).$$

Soient maintenant $\delta > 0$ et $r \in]0, r_0]$. Puisque la famille de constantes $(C_{r,\varepsilon})_{\varepsilon \in]0,r]}$ converge vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ d'après le Lemme 4.49, on détermine $\varepsilon_{r,\delta} \in]0, r]$ comme le supremum des $\varepsilon \in]0, r]$ tel que

$$(4 \dim \mathfrak{a} + 2 \dim M_0) C_{r,\varepsilon} \leq \frac{\delta}{4}. \tag{6.6}$$

On vérifie que $\lim_{\delta \to 0} \varepsilon_{r,\delta} = 0$, d'où le point (c). Considérons

(a) le cône convexe d'intérieur non vide $\mathcal{C}_0 := \sum_{\gamma \in S} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)$,

(b) $(\xi_0, \check{\xi}_0) = (\gamma_{r_G}^+, \gamma_1^-) \in L^{(2)}(\Gamma)$,

(c) le réel $r_0 > 0$ donné par le Lemme 3.23 et la famille de réels strictement positifs $(\varepsilon_{r,\delta})_{r \in]0, r_0],\, \delta > 0}$.

Comme la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq N_r}$ converge vers 0, on fixe un entier $n \geq N_r$ tel que

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_{\delta,r}.$$

Utilisons le point (i), S_n engendre un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon_{\delta,r})-$Schottky, Zariski dense dans G.

D'après le Théorème 5.13, le sous-groupe M_Γ / M_0 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$, donc pour tout $m \in M_\Gamma$, son carré m^2 est dans M_0. Ainsi, pour tout $g \in \Gamma^{lox}$,

$$\lambda^M(g^2) = \left(\lambda^M(g)\right)^2 \in M_0.$$

Notons Γ_n le sous-semigroupe engendré par S_{2n}.

Comme S_n engendre un sous-semigroupe Zariski dense de G, le Corollaire 6.11 donne

$$\overline{\langle \lambda^{ab}(\Gamma_n) \rangle} = \mathfrak{a} \times M_{\Gamma_n} \supset \mathfrak{a} \times M_0.$$

Prouvons que le sous-ensemble de carrés $\lambda^{ab}(\Gamma_n)^2 \subset \mathfrak{a} \times M_0$ engendre un sous-groupe dense dans $\mathfrak{a} \times M_0$. En effet, tout élément $(v, p) \in \mathfrak{a} \times M_0$ admet une racine carrée qui s'écrit

$$\left(\frac{v}{2}, \sqrt{p}\right) \in \mathfrak{a} \times M_0 \subset \overline{\langle \lambda^{ab}(\Gamma_n) \rangle}.$$

Donc pour tout $\varsigma > 0$ il existe un nombre fini d'entiers $(k_j)_{j \in J} \subset \mathbb{Z}$ et un nombre fini d'éléments $(\gamma_j)_{j \in J}$ tels que,

$$\left(\frac{v}{2}, \sqrt{p}\right) \in B\left(\prod_{j \in J} \lambda^{ab}(\gamma_j)^{k_j}\ , \frac{\varsigma}{2}\right).$$

En élevant au carré, on obtient bien l'approximation par les carrés $\lambda^{ab}(\Gamma_n)^2$

$$(v,p) \in B\Big(\prod_{j\in J} \lambda^{ab}(\gamma_j)^{2k_j}\ ,\ \varsigma\Big).$$

D'où

$$\overline{\langle \lambda^{ab}(\Gamma_n)^2\rangle} = \mathfrak{a} \times M_0.$$

Appliquons le Lemme 6.12 de densité dans $\mathfrak{a} \times M_0$, pour la famille de carrés

$$\lambda^{ab}(\Gamma_n)^2.$$

Considérons $F'_\delta \subset \Gamma_n$, de cardinal au plus $3\dim\mathfrak{a} + 2\dim M_0$ tel que le sous-groupe engendré par les carrés $\lambda^{ab}(F'_\delta)^2$ est $\frac{\delta}{2}-$dense dans $\mathfrak{a} \times M_0$.

Notons

$$F_\delta := S_{2n} \cup \{g^2 \mid g \in F'_\delta\}.$$

Alors le sous-groupe engendré par $\lambda^{ab}(F_\delta)$ est $\frac{\delta}{2}-$dense dans $\mathfrak{a} \times M_0$.
Appliquons le Lemme 6.6 à la famille $\lambda^{ab}(F_\delta) \subset \mathfrak{a} \times M_0$. Il existe $v_\delta \in \mathfrak{a}$ tel que le sous-semigroupe engendré par

$$\lambda^{ab}(F_\delta)$$

est $\frac{\delta}{2}-$dense dans

$$\big(v_\delta + \sum_{g\in F_\delta} \mathbb{R}_+\lambda(g)\big) \times M_0.$$

Comme

$$\mathcal{C}_0 \subset \sum_{g\in F_\delta} \mathbb{R}_+\lambda(g),$$

on en déduit que le sous-semigroupe engendré par $\lambda^{ab}(F_\delta)$ est $\frac{\delta}{2}-$dense dans

$$\big(v_\delta + \mathcal{C}_0\big) \times M_0.$$

Réordonnons $F_\delta = (g_1, ..., g_l)$ en fixant le premier $g_1 = \gamma_1^{2n}$ et le dernier élément $g_l = \gamma_{r_G}^{2n}$.

On se donne $c_1, ..., c_l \in K$ tels que pour tout $i = 1, ..., l$

$$B(g_i^+, \varepsilon_{r,\delta}) \subset \mathcal{F}_{c_i}.$$

Cela permet de définir pour tout $i = 1, ..., l$ en notant $c_0 = c_l$ et $g_0 = g_l$,

$$\nu_i := \nu_{c_i,c_{i-1}}(g_i^-; g_i^+, g_{i-1}^+) \in \mathfrak{a} \times M_\Gamma.$$

Posons

$$\begin{cases} m_\delta & := & \pi_M(\nu_l)...\pi_M(\nu_1) \\ x_\delta & := & v_\delta + \sum_{i=1}^l \pi_{\mathfrak{a}}(\nu_i). \end{cases}$$

Vérifions $\heartsuit$. Puisque S est de cardinal $\dim\mathfrak{a}$ et le sous-ensemble F'_δ est de cardinal au plus $3\dim\mathfrak{a} + 2\dim M_0$, le sous-ensemble F_δ est donc de cardinal au plus

$$\dim\mathfrak{a} + 3\dim\mathfrak{a} + 2\dim M_0 = 4\dim\mathfrak{a} + 2\dim M_0.$$

Vérifions $\clubsuit$. Comme Γ_n est le sous-semigroupe engendré par S_n

$$S_{2n} \subset \Gamma_n.$$

On a choisi $F'_\delta \subset \Gamma_n$. D'où

$$F_\delta := S_{2n} \cup (g^2)_{g\in F'_\delta} \subset \Gamma_n.$$

Or d'après le point (i), Γ_n est un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon_{r,\delta})-$Schottky et on en déduit ♣.

Comme $g_1^- = \check{\xi}_0$ et $g_l^+ = \xi_0$, on applique la Proposition 2.66, pour tout $n_1, ..., n_l \geq 1$, l'élément $w = g_l^{n_l}...g_1^{n_1}$ est bien loxodromique et vérifie ♢

$$w^+ \in B(\xi_0, \varepsilon_{r,\delta}) \text{ et } w^- \in B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta}).$$

Prouvons la dernière condition ♠. On commence par appliquer la Proposition 4.50. Soit $(n_i)_{1\leq i\leq l} \in (\mathbb{N}^*)^l$, posons $w := g_l^{n_l}...g_1^{n_1}$ alors

$$\lambda_{c_l}(w) \in B\big(\lambda_{c_l}(g_l)^{n_l}\nu_l...\lambda_{c_1}(g_1)^{n_1}\nu_1 \ , \ 2lC_{r,\varepsilon_{r,\delta}}\big).$$

Comme M est abélien, cela ne dépend pas du choix des c_i et on réécrit

$$\lambda^{ab}(w) \in B\big(\lambda^{ab}(g_l)^{n_l}\nu_l...\lambda^{ab}(g_1)^{n_1}\nu_1 \ , \ 2lC_{r,\varepsilon_{r,\delta}}\big).$$

Or d'après ♡,

$$l \leq 4 \dim \mathfrak{a} + 2 \dim M_0.$$

Donc par choix de $\varepsilon_{r,\delta}$ donné dans l'équation (6.6),

$$2lC_{r,\varepsilon_{r,\delta}} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Comme M est abélien, on réordonne les termes

$$\lambda^{ab}(w) \in B\Big(\lambda^{ab}(g_l)^{n_l}...\lambda^{ab}(g_1)^{n_1}\nu_l...\nu_1 \ , \ \frac{\delta}{2}\Big).$$

Or le sous-semigroupe engendré par $\lambda^{ab}(F_\delta)$ s'écrit

$$\{\lambda^{ab}(g_l)^{n_l}...\lambda^{ab}(g_1)^{n_1} \mid n_1, ..., n_l \geq 1\},$$

et il est $\frac{\delta}{2}-$dense dans $\big(v_\delta + \mathcal{C}_0\big) \times M_0$.

On en déduit que

$$\{\lambda^{ab}(g_l^{n_l}...g_1^{n_1}) \mid n_1, ..., n_l \geq 1\},$$

est $\delta-$dense dans

$$\Big(\big(v_\delta + \mathcal{C}_0\big) \times M_0\Big)\nu_l...\nu_1.$$

Enfin, par choix de x_δ et m_δ on obtient

$$\Big(\big(v_\delta + \mathcal{C}_0\big) \times M_0\Big)\nu_l...\nu_1 = \big(x_\delta + \mathcal{C}_0\big) \times m_\delta M_0.$$

D'où la condition ♠. □

Le Lemme suivant permet d'atteindre tous les points de M_Γ/M_0.

Lemme 6.15. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. On suppose que M est abélien. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense dans G. Considérons l'entier $1 \leq p \leq \dim \mathfrak{a}$ tel que $M_\Gamma/M_0 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.*

Alors pour tout $\xi_0 \in L_+(\Gamma)$, il existe $(h_1, ..., h_p) \in \Gamma^{lox}$ tels que si on note $h_0^+ := \xi_0$,

(i) $(h_{i-1}^+, h_i^-) \in L^{(2)}(\Gamma)$ pour tout $i = 1, ..., p$,

(ii) $M_\Gamma/M_0 = \langle \pi_M(\lambda^{ab}(h_p))M_0, ..., \pi_M(\lambda^{ab}(h_1))M_0\rangle$.

De plus, pour tout $s_p, s_0 \in K$ *tels que*

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{s_0} &= \mathcal{X}(h_1^-)^\complement \\ \mathcal{F}_{s_p} &= \mathcal{X}(h_p^-)^\complement, \end{cases}$$

il existe $m_p \in M$ *et un rang* $N \in \mathbb{N}$*, tels que pour tout* $\alpha \in \{0,1\}^p$*, pour tout* $n \geq N$*,*

$$\sigma^M_{s_p m_p, s_0}(h_p^{2n+\alpha_p}...h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0)M_0 = \alpha.$$

Preuve : D'après le Théorème 5.13, le sous-groupe M_Γ/M_0 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$. Comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps, M_Γ/M_0 et un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}-$espace vectoriel. Comme M est abélien, $M_\Gamma^{ab} = M_\Gamma$. D'après le Corollaire 6.11,

$$\mathfrak{a} \times M_\Gamma = \overline{\langle \lambda^{ab}(\Gamma^{lox})\rangle}.$$

Donc

$$M_\Gamma = \overline{\pi_M\big(\langle \lambda^{ab}(\Gamma^{lox})\rangle\big)} = \overline{\langle \lambda^M(\Gamma^{lox})\rangle}.$$

D'où comme M_Γ/M_0 est discrète,

$$M_\Gamma/M_0 = \langle \lambda^M(\Gamma^{lox})M_0\rangle.$$

Comme M_Γ/M_0 est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}-$espace vectoriel de dimension p, on peut extraire de la famille génératrice $\lambda^M(\Gamma^{lox})M_0$ une base.

Il existe donc $g_1, ..., g_p \in \Gamma^{lox}$ tels que

$$M_\Gamma/M_0 = \langle \lambda^M(g_1)M_0, ..., \lambda^M(g_p)M_0\rangle.$$

Pour tout $u \in G$ et tout élément loxodromique $g \in G^{lox}$, vérifions que

$$\lambda^{ab}(g) = \lambda^{ab}(ugu^{-1}).$$

D'après le Fait 4.42, l'élément ugu^{-1} est loxodromique de points attractif $u.g^+$ et répulsif $u.g^-$. De plus, pour tout $s, s' \in K$ tels que $g^+ \in \mathcal{F}_s$ et $u.g^+ \in \mathcal{F}_{s'}$, par la relation de cocycle,

$$\lambda^{ab}(ugu^{-1}) = \lambda_{s'}(ugu^{-1}) = \sigma^M_{s',s}(u, g^+)\ \lambda_s(g)\sigma^M_{s',s}(u, g^+)^{-1}.$$

Comme M est abélien, on en déduit que

$$\lambda^{ab}(ugu^{-1}) = \lambda^{ab}(g).$$

Notons $u_0 := e_G$ et $g_0^+ := \xi_0$. Construisons maintenant par récurrence $u_1, ..., u_p \in \Gamma$ tels que pour tout $i = 1, ..., p$

$$(u_{i-1}^{-1}g_{i-1}^+, u_i^{-1}g_i^-) \in \big(L_+(\Gamma) \times L_-(\Gamma)\big) \cap \mathcal{F}^{(2)}.$$

Les points répulsifs des éléments loxodromiques sont dans $L_-(\Gamma)$. On en déduit que pour tout $i = 1, ..., p$

$$g_i^- \in L_-(\Gamma).$$

Commençons par construire u_1. Soit $k_0 \in K$ tel que $\xi_0 = k_0\eta_0$. Alors d'après la Proposition 2.22,

$$\{\xi_0\} \times k_0 N\check{\eta}_0 \subset \mathcal{F}^{(2)}.$$

En particulier, puisque $\xi_0 \in L_+(\Gamma)$,

$$\{\xi_0\} \times \big(k_0 N \check{\eta}_0 \cap L_-(\Gamma)\big) \subset L^{(2)}(\Gamma).$$

Comme l'action de Γ^{-1} est minimale sur $L_-(\Gamma)$ d'après le point (1) du Lemme 5.6 et qu'il n'y a pas de points isolés dans cet ensemble limite, il existe et on choisit un élément $u_1 \in \Gamma$ tel que

$$u_1^{-1} g_1^- \in k_0 N \check{\eta}_0 \cap L_-(\Gamma).$$

Ainsi, $(\xi_0, u_1^{-1} g_1^-) \in L^{(2)}(\Gamma)$.
De même, si $u_1, ..., u_{i-1} \in \Gamma$ sont construits, on choisit u_i par minimalité de l'action de Γ^{-1} sur $L_-(\Gamma)$, tel que

$$(u_{i-1}^{-1}.g_{i-1}^+, u_i^{-1}.g_i^-) \in L^{(2)}(\Gamma).$$

Ainsi, par récurrence, on a construit $u_1, ..., u_p \in \Gamma$.

Posons pour tout $i = 1, ..., p$,

$$h_i = u_i^{-1} g_i u_i.$$

Alors comme Γ est un sous-groupe, pour tout $i = 1, ..., p$, l'élément h_i est loxodromique, dans Γ, avec

$$(h_i^+, h_i^-) = (u_i^{-1} g_i^+, u_i^{-1} g_i^-).$$

Par choix des u_i, on vérifie le premier point

$$(u_{i-1}^{-1}.g_{i-1}^+, u_i^{-1}.g_i^-) = (h_{i-1}^+, h_i^-) \in L^{(2)}(\Gamma).$$

Enfin, puisque pour tout $i = 1, ..., p$,

$$\lambda^{ab}(h_i) = \lambda^{ab}(g_i),$$

la famille

$$\big(\lambda^M(h_1))M_0, ..., \lambda^P(h_p)M_0\big).$$

forme une base du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}-$espace vectoriel M_Γ/M_0, d'où la condition (ii).

Choisissons d'abord $s_1, ..., s_p \in K$ tels que $\mathcal{F}_{s_i} = \mathcal{X}(h_i^-)^{\complement}$ est le bassin d'attraction de h_i^+ pour l'élément loxodromique h_i, puis $s_0 = s_1$. Pour tout $n_1, ..., n_p \geq 1$, notons $\underline{n} := (n_1, ..., n_p)$ et pour tout $i = 1, ..., p$ posons

$$\xi_{i,\underline{n}} := h_i^{n_i} ... h_1^{n_1} \xi_0.$$

Pour tout $i = 2, ..., p$, notons $\mathcal{F}^0_{s_i, s_{i-1}}$ la composante connexe de $\mathcal{F}_{s_i} \cap \mathcal{F}_{s_{i-1}}$ contenant h_{i-1}^+.

Comme h_1 est loxodromique et ξ_0 est dans le bassin d'attraction de h_1^+ et (h_1^+, h_2^-) est un couple transverse, on en déduit que $h_1^+ \in \mathcal{X}(h_2^-)^{\complement}$. Ainsi, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_1 \geq N_1$,

$$h_1^{n_1} \xi_0 = \xi_{1,n_1} \in \mathcal{F}^0_{s_2, s_1}.$$

Supposons pour un certain $i = 1, ..., p$ qu'il existe N_{i-1} tels que pour tout
$\underline{n} \in ([N_{i-1}, +\infty[\cap \mathbb{N})^p$ et tout $j = 1, ..., i-1$

$$\xi_{j,\underline{n}} \in \mathcal{F}^0_{s_{j+1}, s_j}.$$

Comme $\xi_{i-1,\underline{n}}$ est dans le bassin d'attraction de l'élément loxodromique h_i et (h_i^+, h_{i+1}^-) est un couple transverse, il existe $N_i \geq N_{i-1}$ tel que pour tout $\underline{n} \in ([N_i, +\infty[\cap \mathbb{N})^p$,

$$h_i^{n_i} \xi_{i-1,\underline{n}} = \xi_{i,\underline{n}} \in \mathcal{F}^0_{s_{i+1}, s_i}.$$

En particulier, puisque $N_i \geq N_{i-1}$, on en déduit que pour tout $j = 1, ..., i$,

$$\xi_{j,\underline{n}} \in \mathcal{F}^0_{s_{j+1},s_j}.$$

Enfin, par récurrence, on déduit qu'il existe un rang entier $N_p \geq 1$ tel que pour tout $\underline{n} \in ([N_p, +\infty[\cap \mathbb{N})^p$, et tout $i = 1, ..., p$

$$\xi_{i,\underline{n}} \in \mathcal{F}^0_{s_{i+1},s_i}.$$

Pour tout $\alpha \in \{0,1\}^p$ et tout $n \geq N_p$, appliquons la relation de cocycle pour σ^M et le $p-$uplet $(2n + \alpha_1, ..., 2n + \alpha_p)$ qu'on note $\underline{\alpha}_n$,

$$\begin{aligned}\sigma^M_{s_p,s_1}(h_p^{2n+\alpha_p}...h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0) &= \sigma^M_{s_p,s_{p-1}}\big(h_p^{2n+\alpha_p}, h_{p-1}^{2n+\alpha_{p-1}}...h_1^{2n+\alpha_1}\xi_0\big)...\sigma^M_{s_1}\big(h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0\big)\\ &= \sigma^M_{s_p,s_{p-1}}\big(h_p^{2n+\alpha_p}, \xi_{p-1,\underline{\alpha}_n}\big)...\sigma^M_{s_1}\big(h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0\big)\\ &= \sigma^M_{s_p}\big(h_p^{2n+\alpha_p}, \xi_{p-1,\underline{\alpha}_n}\big)m_{s_p,s_{p-1}}(\xi_{p-1,\underline{\alpha}_n})...\sigma^M_{s_1}\big(h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0\big).\end{aligned}$$

Comme les cartes $\mathcal{F}_{s_i}$ correspondent aux bassins d'attraction de h_i, on en déduit d'après le Lemme 4.43, que pour tout $n \geq N_p$ et tout $\alpha \in \{0,1\}^p$,

$$\sigma^M_{s_p,s_1}(h_p^{2n+\alpha_p}...h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0) = \lambda^M_{s_p}\big(h_p^{2n+\alpha_p}\big)m_{s_p,s_{p-1}}(\xi_{p-1,\underline{\alpha}_n})...\lambda^M_{s_1}\big(h_1^{2n+\alpha_1}\big).$$

Comme M est abélien, la partie elliptique λ^M ne dépend pas du choix des $s_1, ..., s_p \in K$. D'où

$$\sigma^M_{s_p,s_1}(h_p^{2n+\alpha_p}...h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0) = \lambda^M\big(h_p^{2n+\alpha_p}\big)m_{s_p,s_{p-1}}(\xi_{p-1,\underline{\alpha}_n})...\lambda^M\big(h_1^{2n+\alpha_1}\big).$$

Enfin, on rectifie par récurrence les éléments $s_2, ..., s_p \in K$ en multipliant à droite par des éléments $m_i \in M$ avec $m_1 = e_M$, de sorte que pour tout $i = 2, ..., p$, restreinte à la composante connexe $\mathcal{F}^0_{s_i,s_{i-1}}$ de $\mathcal{F}_{s_i} \cap \mathcal{F}_{s_{i-1}}$ contenant h^+_{i-1}, l'application

$$m_{s_i m_i, s_{i-1} m_{i-1}} : \mathcal{F}^0_{s_i,s_{i-1}} \longrightarrow M$$

soit à valeurs dans M_0.

On en déduit que pour tout $n \geq N_p \geq 1$, pour tout $\alpha \in \{0,1\}^p$, en quotientant par M_0,

$$\sigma^M_{s_p m_p, s_1}(h_p^{2n+\alpha_p}...h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0)M_0 = \lambda^M\big(h_p^{2n+\alpha_p}\big)M_0...\lambda^M\big(h_1^{2n+\alpha_1}\big)M_0.$$

Enfin, en utilisant que M_Γ/M_0 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$ et la condition (ii) que

$$\big(\lambda^M(h_1))M_0, ..., \lambda^M(h_p))M_0\big).$$

est une base, on en déduit que pour tout $n \geq N_p \geq 1$,

$$\sigma^M_{s_p m_p, s_1}(h_p^{2n+\alpha_p}...h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0)M_0 = \lambda^M\big(h_p\big)^{\alpha_p}M_0...\lambda^M\big(h_1\big)^{\alpha_1}M_0 = \alpha.$$

□

6.4.3 Démonstration de la Proposition de décorrélation

Tout d'abord, on va appliquer les deux Lemmes précédents pour trouver la paire $(\xi_1, \check{\xi}_1)$. D'après le Lemme 6.14, on considère le couple de points $(\xi_0, \check{\xi}_0) \in L^{(2)}(\Gamma)$ donné par le point (b). Appliquons ensuite le Lemme 6.15 à ξ_0 : considérons la famille d'éléments loxodromiques $(h_1, ..., h_p) \in \Gamma^{lox}$ tels que si on note $h_0^+ := \xi_0'$

(i') $(h_{i-1}^+, h_i^-) \in L^{(2)}(\Gamma)$ pour tout $i = 1, ..., p$,

(ii') pour tout $s_p, s_1 \in K$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{s_1} &= \mathcal{X}(h_1^-)^{\complement} \\ \mathcal{F}_{s_p} &= \mathcal{X}(h_p^-)^{\complement}, \end{cases}$$

il existe $m_p \in M$ et un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $\alpha \in \{0,1\}^p$, pour tout $n \geq N$,

$$\sigma^M_{s_p m_p, s_1}(h_p^{2n+\alpha_p} ... h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0) M_0 = \alpha \in M_\Gamma / M_0.$$

On choisit maintenant, grâce à la densité

$$\{(\gamma^+, \gamma^-) \mid \gamma \in \Gamma^{lox}\}$$

dans $L^{(2)}(\Gamma)$ donnée par le Lemme 5.6, un élément loxodromique $h_{p+1} \in \Gamma^{lox}$, tel que

$$\begin{cases} (h_{p+1}^+, \check{\xi}_0) &\in L^{(2)}(\Gamma) \\ (h_p^+, h_{p+1}^-) &\in L^{(2)}(\Gamma). \end{cases}$$

Un tel choix est possible car il n'y a pas de points isolés dans les ensembles limites $L_+(\Gamma)$ et $L_-(\Gamma)$. On définit maintenant

$$(\xi_1, \check{\xi}_1) := (h_{p+1}^+, \check{\xi}_0). \tag{6.7}$$

Trouvons maintenant r_1. Considérons r_0 le réel donné par le point (c) du Lemme 6.14. D'après le point (i'), le choix de h_{p+1} et le fait que les éléments $h_1, ..., h_{p+1}$ sont loxodromiques, le réel suivant

$$r_0' := \inf_{i=1,...,p+1} \left\{ \frac{1}{6} \mathrm{d}(h_{i-1}^+, \mathcal{X}(h_i^-)), \frac{1}{2} \mathrm{d}(h_i^+, \mathcal{X}(h_i^-)) \right\}$$

est strictement positif. Enfin, définissons

$$r_1 := \inf(r_0, r_0'). \tag{6.8}$$

Enfin, pour le dernier point, on considère la famille de réels $(\varepsilon_{r,\delta})$ donnée par le point (c) du Lemme 6.14.

Fixons maintenant $\delta > 0$ et $r \in]0, r_1]$ et considérons $c_1, \check{c}_1 \in K$ tels que

$$B(\xi_1, r) \subset \mathcal{F}_{c_1} \text{ et } \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_1))^{\complement} \subset \mathcal{F}_{\check{c}_1}.$$

Posons

$$\delta' := \frac{\delta}{3}.$$

D'après le Lemme 2.58, appliqué à la famille d'éléments loxodromiques $(h_1, ..., h_{p+1})$, pour tout $r \in]0, r_1]$ il existe un entier N_r et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq N_r}$ qui converge vers 0 telle que pour tout $i = 1, ..., p+1$, l'élément h_i^n est $(r, \varepsilon_n)-$loxodromique. Appliquons le point (ii') du Lemme 6.15, considérons $s_1, s_p \in K$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{s_1} &= \mathcal{X}(h_1^-)^{\complement} \\ \mathcal{F}_{s_p} &= \mathcal{X}(h_p^-)^{\complement}, \end{cases}$$

et $m_p \in M$ et un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $\alpha \in \{0,1\}^p$, pour tout $n \geq N$,

$$\sigma^M_{s_p m_p, s_1}(h_p^{2n+\alpha_p} ... h_1^{2n+\alpha_1}, \xi_0) M_0 = \alpha \in M_\Gamma / M_0.$$

Pour tout $m \in M_\Gamma$, il existe $\alpha(m) \in \{0,1\}^p \simeq M_\Gamma/M_0$ tel que pour tout $n \geq \sup(N, N_r)$,

$$\sigma^M_{s_p m_p, s_1}(h_p^{2n+\alpha_p(m)} ... h_1^{2n+\alpha_1(m)}, \xi_0) M_0 = m M_0 \in M_\Gamma / M_0.$$

Posons pour tout $m \in M_\Gamma$ et $n \geq \sup(N, N_r)$,

$$\begin{cases} h_{[\alpha(m),n]} & := & h_p^{2n+\alpha_p(m)} ... h_1^{2n+\alpha_1(m)} & & \\ x_{[\alpha(m),n]} & := & \sigma\big(h_p^{2n+\alpha_p(m)} ... h_1^{2n+\alpha_1(m)}, \xi_0\big) & = & \sigma(h_{[\alpha(m),n]}, \xi_0) \\ m_{[\alpha(m),n]} & := & \sigma^M_{s_p m_p, s_1}\big(h_p^{2n+\alpha_p(m)} ... h_1^{2n+\alpha_1(m)}, \xi_0\big) & = & \sigma^M_{s_p m_p, s_1}(h_{[\alpha(m),n]}, \xi_0). \end{cases}$$

Remarquons que

$$\bigcup_{[m] \in M_\Gamma / M_0} m_{[\alpha(m),n]} M_0 = M_\Gamma.$$

Prouvons que pour n très grand,

$$\bigcup_{[m] \in M_\Gamma / M_0} \sigma^M_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}^{2n}, h_{[\alpha(m),n]} \xi_0) m_{[\alpha(m),n]} M_0 = M_\Gamma.$$

Tout d'abord, pour tout $n \geq N_r$, en appliquant la Proposition 4.50 puisqu'on a bien choisi $r \leq r_1$,

$$h_{[\alpha(m),n]} \xi_0 \in B(h_p^+, \varepsilon_n).$$

Appliquons ensuite le Lemme 4.49,

$$\sigma_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}^{2n}, \xi) \in B(\lambda_{c_1}(h_{p+1})^{2n} \nu_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}, \xi), C_{r, \varepsilon_n}).$$

D'après le Fait 4.46, l'application

$$\xi \longmapsto \nu_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}, \xi)$$

est continue sur son ensemble de Définition. Or comme la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq N_r}$ converge vers 0, à partir d'un certain rang $N_0 \geq N_r$, pour tout $n \geq N_0$, la boule $B(h_p^+, \varepsilon_n)$ est dans son ensemble de définition. Ainsi, comme M_Γ/M_0 est discret, à partir d'un certain rang $N_0 \geq N_r$, pour tout $n \geq N_0$, l'application

$$\xi \in B(h_p^+, \varepsilon_n) \longmapsto \sigma^M_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}^{2n}, \xi)$$

est constante modulo M_0. Par la relation de cocycle,

$$\begin{aligned} \sigma^M_{c_1, s_1}(h_{p+1}^{2n} h_{[\alpha(m),n]}, \xi_0) &= \sigma^M_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}^{2n}, h_{[\alpha(m),n]} \xi_0) \sigma^M_{s_p m_p, s_1}(h_{[\alpha(m),n]}, \xi_0) \\ &= \sigma^M_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}^{2n}, h_{[\alpha(m),n]} \xi_0) m_{[\alpha(m),n]}. \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \geq \sup(N_0, N, N_r)$,

$$\bigcup_{[m] \in M_\Gamma / M_0} \sigma^M_{c_1, s_p m_p}(h_{p+1}^{2n} h_{[\alpha(m),n]}, \xi_0) M_0 = M_\Gamma.$$

Fixons un entier $n \geq \sup(N_0, N, N_r)$ tel que $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{r,\delta'}$ et notons pour tout $\alpha \in \{0,1\}^p$

$$\begin{cases} h_{[\alpha]} & := & h_{p+1}^{2n} h_p^{2n+\alpha_p(m)} ... h_1^{2n+\alpha_1(m)} \\ x_{[\alpha]} & := & \sigma(h_{[\alpha]}, \xi_0) \\ m_{[\alpha]} & := & \sigma_{c_1,s_1}^M(h_{[\alpha]}, \xi_0). \end{cases}$$

On en déduit que

$$\bigcup_{\alpha\in\{0,1\}^p} m_{[\alpha]} M_0 = M_\Gamma.$$

Considérons le sous-ensemble non vide $F_{\delta'} \subset \Gamma$ et le point $(x_{\delta'}, m_{\delta'}) \in \mathfrak{a} \times M_\Gamma$ vérifiant les quatres points suivants du Lemme 6.14.

- ♡ $F_{\delta'}$ est fini de cardinal $l \leq 4 \dim \mathfrak{a} + 2 \dim M_0$.

- ♣ $F_{\delta'}$ est inclus dans un sous-semigroupe fortement $(r, \varepsilon_{r,\delta'})-$Schottky Zariski dense dans G.

- ♢ Il existe un ordre de $F_{\delta'} = (g_1, ..., g_l)$ tel que $(g_l^+, g_1^-) = (\xi_0, \check{\xi}_0)$ et pour tout $w = g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}$ avec $n_1, ..., n_l \geq 1$,

$$w^+ \in B(\xi_0, \varepsilon_{r,\delta'}) \text{ et } w^- \in B(\check{\xi}_0, \varepsilon_{r,\delta'}).$$

- ♠ Pour un tel ordre de $F_{\delta'}$, l'ensemble

$$\lambda^{ab}\big(\{g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}\big)$$

est $\delta'-$dense dans $\{x_{\delta'} + \mathcal{C}_0\} \times m_{\delta'} M_0$.

Rappelons que d'après l'équation (6.7), $\check{\xi}_0 = \check{\xi}_1$.

D'après le Lemme 4.49 appliqué à $g = g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}$, pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_1))^\complement$,, tout $n_1, ..., n_l \geq 1$, comme $r_1 \leq \frac{1}{6}\mathrm{d}(g_l^+, \mathcal{X}(h_1)^-)$, on déduit que

$$\mathcal{F}_{s_1} = \mathcal{X}(h_1^-)^\complement \supset B(g_l^+, r) \ni g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} \xi,$$

et

$$\sigma_{s_1,\check{c}_1}(g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}, \xi) \in B\big(\lambda^{ab}(g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}) \nu_{s_1,\check{c}_1}(g_1^-; g_l^+, \xi), C_{r,\varepsilon_{r,\delta'}}\big).$$

Notons,

$$\nu_\xi := \nu_{s_1,\check{c}_1}(g_1^-; g_l^+, \xi).$$

Appliquons de nouveau ce Lemme à $h_{[\alpha]} g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}$ et ξ en utilisant $g_l^+ = \xi_0$

$$\sigma_{c_1,\check{c}_1}(h_{[\alpha]} g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}, \xi) \in B\big(\sigma_{c_1,s_1}(h_m, g_l^+) \lambda^{ab}(g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}) \nu_\xi, 2C_{r,\varepsilon_{r,\delta'}}\big).$$

En utilisant le choix de r_1 et le fait que les $h_1^{2n+\alpha_1}, ..., h_{p+1}^{2n}$ sont $(r, \varepsilon_{r,\delta'})-$loxodromiques, on en déduit †, que tous les éléments de cet ensemble

$$\{h_{[\alpha]} g_l^{n_l} ... g_1^{n_1} \mid n_1, ..., n_l \geq 1 \ , \ \alpha \in \{0,1\}^p\}$$

sont $(2r, 2\varepsilon_{r,\delta'})-$loxodromiques, avec leurs points attractifs et répulsifs dans

$$B(\xi_1, \varepsilon_{r,\delta'}) \times B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta'}).$$

Maintenant, utilisons le résultat de densité ♠, avec $\nu_1 := \nu_{s_1,\check{c}_1}(g_1^-; g_l^+, \xi_1)$

$$\{\sigma_{c_1,s_1}(h_{[\alpha]}, \xi_0) \lambda^{ab}(g_l^{n_l} ... g_1^{n_1}) \nu_1 \mid n_1, ..., n_l \geq 1\}$$

est δ'−dense dans

$$\sigma_{c_1,s_1}(h_{[\alpha]},\xi_0)\Big(\{x_{\delta'}+\mathcal{C}_0\}\times m_{\delta'}M_0\Big)\nu_1.$$

C'est-à-dire en utilisant que $\mathfrak{a}\times M$ est abélien, que le sous-ensemble

$$\{\sigma_{c_1,\check{c}_1}(h_{[\alpha]}g_l^{n_l}...g_1^{n_1},\xi_1)\mid n_1,...,n_l\geq 1\}$$

est $\delta'+2C_{r,\varepsilon_{r,\delta'}}$−dense dans

$$\{x_{\delta'}+x_{[\alpha]}+\pi_{\mathfrak{a}}(\nu_1)+\mathcal{C}_0\}\times m_{[\alpha]}m_{\delta'}\pi_M(\nu_1)M_0.$$

Or

$$\bigcup_{\alpha\in\{0,1\}^p} m_{[\alpha]}m_{\delta'}\pi_M(\nu_1)M_0=M_\Gamma,$$

et le cône $\mathcal{C}_0$ est convexe d'intérieur non vide. Donc l'intersection finie

$$\bigcap_{\alpha\in\{0,1\}^p}\{x_{\delta'}+x_{[\alpha]}+\pi_{\mathfrak{a}}(\nu_1)+\mathcal{C}_0\}$$

contient un translaté de $\mathcal{C}_0$ de la forme

$$x_\Gamma+\mathcal{C}_0.$$

De sorte que pour tout $\xi\in\mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_1))^{\complement}$,

$$\{x_\Gamma+\nu(\check{\xi}_1;\xi_1,\xi)+\mathcal{C}_0\}\times M_\Gamma\subset\bigcap_{\alpha\in\{0,1\}^p}\{x_{\delta'}+x_{[\alpha]}+\nu(\check{\xi}_1;\xi_1,\xi)+\pi_{\mathfrak{a}}(\nu_1)+\mathcal{C}_0\}\times M_\Gamma.$$

On en déduit que

$$\{x_\Gamma+\nu(\check{\xi}_1;\xi_1,\xi)+\mathcal{C}_0\}\times M_\Gamma\subset\bigcup_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^p\\ n_1,\dots,n_l\geq 1}} B\Big(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(h_{[\alpha]}g_l^{n_l}...g_1^{n_1},\xi),\delta'+2C_{r,\varepsilon_{r,\delta'}}\Big)$$

Maintenant, on extrait une sous-famille finie

$$(\gamma_i)_{i\in I}\subset\{h_{[\alpha]}g_l^{n_l}...g_1^{n_1}\mid n_1,...,n_l\geq 1\ ,\ \alpha\in\{0,1\}^p\}$$

telle que

$$\{x_\Gamma+\nu(\check{\xi}_1;\xi_1,\xi)\}\times M_\Gamma\subset\bigcup_{i\in I}B\big(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i,\xi),\delta'+2C_{r,\varepsilon_{r,\delta'}}\big).$$

On applique le Lemme 4.49 pour toute famille $(\xi_i)_{i\in I}\subset B(\xi,\varepsilon_{r,\delta'})$,

$$\{x_\Gamma+\nu(\check{\xi}_1;\xi_1,\xi)\}\times M_\Gamma\subset\bigcup_{i\in I}B\big(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i,\xi_i),\delta'+3C_{r,\varepsilon_{r,\delta'}}\big).$$

Enfin, par choix de $C_{r,\varepsilon_{r,\delta'}}\leq\frac{\delta}{4}$ et $\delta'=\frac{\delta}{3}$, on en déduit bien ‡.

6.5 Mélange topologique du flot de translation

Rappelons la Définition 5.16, $\widetilde{\Omega}_G := \pi_{G/M}^{-1}(\widetilde{\Omega})$, c'est-à-dire en coordonnées de Bruhat-Hopf, pour tout $c \in K$,

$$\widetilde{\Omega}_G \cap G_c \simeq L_c^{(2)}(\Gamma) \times \mathfrak{a} \times M,$$

où $L_c^{(2)}(\Gamma) := L^{(2)}(\Gamma) \cap \mathcal{F}_c^{(2)}$ et $G_c = cN^-MAN$. Ce sous-ensemble $\Gamma-$invariant par multiplication à gauche et $\mathfrak{a} \times M-$invariant par multiplication à droite est défini indépendamment des cartes choisies. On note $\Omega_G = \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_G$ son quotient.

Pour tout $[m] \in M/M_\Gamma$, le sous-ensemble de $\widetilde{\Omega}_G$, invariant par multiplication à gauche par Γ et à droite par $\mathfrak{a} \times M_\Gamma$, est défini en coordonnées globales d'Iwasawa-Hopf par

$$\widetilde{\Omega}_{[m]} := \big(L_{[m]}(\Gamma) \times L_-(\Gamma)\big) \cap \mathcal{F}_G^{(2)} \times \mathfrak{a}.$$

On note $\Omega_{[m]} = \Gamma\backslash\widetilde{\Omega}_{[m]}$ son quotient.

6.5.1 Une condition suffisante de mélange

Théorème 6.16. *Soit G un groupe de Lie semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact et Γ un sous-groupe Zariski dense discret de G. On suppose que M est abélien.*

Alors pour tout $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, le système dynamique $(\Omega_{[e_M]}, \phi_t^\theta)$ est topologiquement mélangeant.

Preuve : Fixons $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$. On prouve que pour tous ouverts non vides $\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{V}} \subset \widetilde{\Omega}_{[e_M]}$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, il existe $\gamma_t \in \Gamma$ vérifiant

$$\gamma_t\widetilde{\mathcal{U}} \cap \phi_t^\theta(\widetilde{\mathcal{V}}) \neq \emptyset.$$

Soient $\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathcal{V}} \subset \widetilde{\Omega}_{[e_M]}$ deux ouverts non vides. Sans perte de généralité, on suppose qu'il existe $s_U, s_V \in K$, des ouverts non vides $\mathcal{U}_+ \times \mathcal{U}_- \in L_{s_U}^{(2)}(\Gamma)$ et $\mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_- \in L_{s_V}^{(2)}(\Gamma)$, des points $u, v \in \mathfrak{a} \times M_\Gamma$ et un réel $\delta > 0$, tels que les ouverts $\widetilde{\mathcal{U}}$ et $\widetilde{\mathcal{V}}$ s'écrivent en coordonnées de Bruhat-Hopf

$$\mathcal{H}_{s_U}(\widetilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}_+ \times \mathcal{U}_- \times B(u, \delta),$$

$$\mathcal{H}_{s_V}(\widetilde{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_- \times B(v, \delta).$$

Notons $\mathcal{U}^{(2)} = \mathcal{U}_+ \times \mathcal{U}_-$ et $\mathcal{V}^{(2)} = \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-$.

Rappelons l'énoncé de la Proposition 6.13 de décorrélation, il existe

(i) un couple de points transverses $(\xi_1, \check{\xi}_1) \in L^{(2)}(\Gamma)$,

(ii) un réel strictement positif

$$r_1 \leq \frac{1}{6}\mathrm{d}(\xi_1, \mathcal{X}(\check{\xi}_1)),$$

(iii) une famille de réels strictement positifs $(\varepsilon_{r,\delta})_{r\in]0,r_0],\, \delta>0}$ telle qu'à $r \in]0, r_1]$ fixé,

$$\lim_{\delta\to 0} \varepsilon_{r,\delta} = 0,$$

tels que pour tout $\delta > 0$ et $r \in]0, r_1]$, pour tout $c_1, \check{c}_1 \in K$ tels que

$$B(\xi_1, r) \subset \mathcal{F}_{c_1} \text{ et } \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_1))^\complement \subset \mathcal{F}_{\check{c}_1},$$

il existe une famille finie $(\gamma_i)_{i\in I} \subset \Gamma$ et un point $x_\delta \in \mathfrak{a}$ vérifiant les deux conditions suivantes.

† Pour tout $i \in I$, l'élément γ_i est $(r, \varepsilon_{r,\delta})-$loxodromique avec

$$(\gamma_i^+, \gamma_i^-) \in B(\xi_1, \varepsilon_{r,\delta}) \times B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta}).$$

‡ Pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{6r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_1))^{\complement}$ et $(\xi_i)_{i\in I} \subset B(\xi, \varepsilon_{r,\delta})$,

$$\{x_\delta + \nu(\check{\xi}_1; \xi_1, \xi)\} \times M_\Gamma \subset \cup_{i\in I} B(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i, \xi_i), \delta).$$

Dans une première étape, on prouve le mélange lorsque

$$\mathcal{U}^{(2)} = \mathcal{V}^{(2)} = B(\xi_1, \varepsilon_{r,\delta'}) \times B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta'}),$$

pour tout $r \in]0, r_1]$, pour $\delta' = \frac{\delta}{2} > 0$, avec comme cartes choisies $\check{c}_1 := s_U$ et $c_1 := s_V$.

Dans une seconde étape, on utilise la transitivité topologique de l'action de Γ sur $L^{(2)}(\Gamma)$ (Théorème 5.8) pour se ramener à ce cas.

Prouvons la première étape. On applique le Corollaire 6.8 à $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, à l'ouvert non vide

$$\mathcal{O}^{(2)} := B(\xi_1, \varepsilon_{r,\delta'}) \times B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta'}) \subset L^{(2)}(\Gamma)$$

au point $x = v_{\mathfrak{a}} - u_{\mathfrak{a}} - x_{\delta'} \in \mathfrak{a}$ et au réel $\delta' > 0$. Il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$ il existe un élément loxodromique $\gamma_t \in \Gamma$ vérifiant

$$\begin{cases} (\gamma_t^+, \gamma_t^-) \in \mathcal{O}^{(2)} \\ \quad \lambda(\gamma_t) \in B(x + t\theta, \delta'). \end{cases} \tag{6.9}$$

Enfin, on applique le point † de la Proposition de décorrélation, pour en déduire que pour tout $i \in I$, puisque γ^- est le point fixe attractif de γ^{-1},

$$\gamma_t^{-1}\gamma_i^{-1} B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta'}) \subset B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta'}).$$

Ainsi, pour tout $\check{\xi} \in \gamma_t^{-1}\gamma_i^{-1} B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta'})$ pour tout $i \in I$,

$$\begin{aligned} \gamma_i\gamma_t(\gamma_t^+, \check{\xi}\ ;\ u)_{\check{c}_1} &= (\gamma_i\gamma_t^+, \gamma_i\gamma_t\check{\xi}\ ;\ \sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i\gamma_t, \gamma_t^+)u)_{c_1} \\ &= (\gamma_i\gamma_t^+, \gamma_i\gamma_t\check{\xi}\ ;\ \sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i, \gamma_t^+)\lambda^{ab}(\gamma_t)u)_{c_1} \\ &\in \mathcal{O}^{(2)} \times \{\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i, \gamma_t^+)\lambda^{ab}(\gamma_t)u\}. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le point ‡ de la Proposition de décorrélation,

$$\{\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i, \gamma_t^+)\lambda^{ab}(\gamma_t)u \mid i \in I\}$$

est $\delta'-$dense dans

$$\Big(\{x_{\delta'} + \nu(\check{\xi}_1; \xi_1, \xi_1)\} \times M_\Gamma\Big)\lambda^{ab}(\gamma_t)u.$$

Or $\nu(\check{\xi}_1; \xi_1, \xi_1) = 0$, on en déduit que

$$\{\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i, \gamma_t^+)\lambda^{ab}(\gamma_t)u \mid i \in I\}$$

est $\delta'-$dense dans

$$\{x_{\delta'} + \lambda(\gamma_t) + u_{\mathfrak{a}}\} \times M_\Gamma.$$

On utilise l'équation (6.9) pour en déduire la $2\delta'-$densité de

$$\{\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i, \gamma_t^+)\lambda^{ab}(\gamma_t)u \mid i \in I\}$$

dans
$$\{x_{\delta'} + x + t\theta + u_{\mathfrak{a}}\} \times M_\Gamma.$$
Or $x_{\delta'} + x + t\theta + u_{\mathfrak{a}} = t\theta + v_{\mathfrak{a}}$. Donc
$$\{v_{\mathfrak{a}} + t\theta\} \times M_\Gamma \subset \bigcup_{i\in I} B(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(\gamma_i\gamma_t, \gamma_t^+)u, 2\delta').$$
Considérons $g_t \in \{\gamma_i\gamma_t\}_{i\in I}$ tel que
$$(v_{\mathfrak{a}} + t\theta, v_M) \in B(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(g_t, \gamma_t^+)u, 2\delta').$$
Pour tout $\check{\xi} \in \gamma_t^{-1}\gamma_i^{-1}B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta'})$, pour tout $w \in B(u, 2\delta')$
$$\begin{aligned} g_t(\gamma_t^+, \check{\xi}\ ;\ w)_{\check{c}_1} &= (g_t\gamma_t^+, g_t\check{\xi}\ ;\ \sigma_{c_1,\check{c}_1}(g_t, \gamma_t^+)w)_{c_1} \\ &\in \mathcal{O}^{(2)} \times B(\sigma_{c_1,\check{c}_1}(g_t, \gamma_t^+)u, 2\delta'). \end{aligned}$$
On a prouvé que
$$g_t\mathcal{H}_{\check{c}_1}^{-1}\Big(\mathcal{O}^{(2)} \times B(u, 2\delta')\Big) \cap \phi_\theta^t\Big(\mathcal{H}_{c_1}^{-1}(\mathcal{O}^{(2)} \times B(v, 2\delta'))\Big)$$
contenait le point de coordonnées
$$(g_t\gamma_t^+, g_t\check{\xi}\ ;\ (v_{\mathfrak{a}} + t\theta, v_M))_{c_1} = \phi_\theta^t(g_t\gamma_t^+, g_t\check{\xi}\ ;\ v)_{c_1}.$$
Par conséquent comme $\delta' = \frac{\delta}{2}$, pour tout $t \geq T$, il existe $g_t \in \Gamma$ tel que
$$g_t\Big(\mathcal{H}_{\check{c}_1}^{-1}(\mathcal{O}^{(2)} \times B(u, \delta))\Big) \cap \phi_\theta^t\Big(\mathcal{H}_{c_1}^{-1}(\mathcal{O}^{(2)} \times B(v, \delta))\Big) \neq \emptyset.$$

Prouvons la seconde étape. D'après le Théorème 5.8 de transitivité topologique de l'action de Γ sur $L^{(2)}(\Gamma)$, il existe $h_U, h_V \in \Gamma$ tels que
$$\begin{cases} h_U\mathcal{U}^{(2)} & \ni \quad (\xi_1, \check{\xi}_1) \\ h_V\mathcal{V}^{(2)} & \ni \quad (\xi_1, \check{\xi}_1) \end{cases}$$
Donc par $\Gamma-$invariance par multiplication à gauche de $\widetilde{\Omega}_{[e_M]}$ et $\mathfrak{a} \times M_\Gamma-$invariance par multiplication à droite (Théorème 5.15), il existe $u', v' \in \mathfrak{a} \times M_\Gamma$ tels que
$$\begin{cases} h_U\mathcal{H}_{s_U}(\widetilde{\mathcal{U}}) & \ni \quad (\xi_1, \check{\xi}_1\ ;\ u')_{\check{c}_1} \\ h_V\mathcal{H}_{s_V}(\widetilde{\mathcal{V}}) & \ni \quad (\xi_1, \check{\xi}_1\ ;\ v')_{c_1} \end{cases}$$
Considérons $r'' \in]0, r_1]$ et $\delta'' > 0$ tels que
$$\begin{cases} h_U\widetilde{\mathcal{U}} & \supset \quad \mathcal{H}_{\check{c}_1}^{-1}\Big(B(\xi_1, \varepsilon_{r,\delta''}) \times B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta''}) \times B(u', \delta'')\Big) \\ h_V\widetilde{\mathcal{V}} & \supset \quad \mathcal{H}_{c_1}^{-1}\Big(B(\xi_1, \varepsilon_{r,\delta''}) \times B(\check{\xi}_1, \varepsilon_{r,\delta''}) \times B(v', \delta'')\Big). \end{cases}$$
On applique l'étape 1, il existe un réel $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, il existe $g_t \in \Gamma$ tel que
$$g_th_U\widetilde{\mathcal{U}} \cap \phi_\theta^t\big(h_V\widetilde{\mathcal{V}}\big) \neq \emptyset.$$
Enfin comme les actions de Γ et ϕ_θ^t commutent, on en déduit que
$$h_V^{-1}g_th_U\widetilde{\mathcal{U}} \cap \phi_\theta^t\big(\widetilde{\mathcal{V}}\big) \neq \emptyset.$$
Comme Γ est un sous-groupe, $h_V^{-1}g_th_U \in \Gamma$ et on en déduit le mélange topologique. $\square$

6.5.2 Théorème de mélange topologique

Théorème 6.17. *Soit G un groupe de Lie semisimple, connexe, réel linéaire et de type non-compact et Γ un sous-groupe Zariski dense discret de G. On suppose que le sous-groupe M est abélien.*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i) θ est dans l'intérieur du cône limite.

(ii) pour tout $[m] \in M/M_\Gamma$, le système dynamique topologique $(\Omega_{[m]}, \phi_t^\theta)$ est topologiquement mélangeant.

Preuve du Théorème 6.17 : Soit $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$. Pour tout $m \in M$,

$$\widetilde{\Omega}_{[m]} = \widetilde{\Omega}_{[e_M]} m.$$

On en déduit que pour tout $m \in M$, les systèmes dynamiques $(\Omega_{[m]}, \phi_t^\theta)$ ont tous le même comportement dynamique. Il suffit donc de démontrer que le système dynamique $(\Omega_{[e_M]}, \phi_t^\theta)$ est topologiquement mélangeant si et seulement si $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$.

Si le système dynamique $(\Omega_{[e_M]}, \phi_t^\theta)$ est topologiquement mélangeant, alors il est topologiquement transitif. Par conséquent, d'après la Proposition 5.17, θ est dans l'intérieur du cône limite.

La réciproque est donnée par le Théorème 6.16, prouvé au paragraphe précédent.

□

6.6 Transitivité topologique sur G/MN

Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact et soit Γ un sous-groupe discret, Zariski dense dans G. On étudie l'action de Γ sur l'espace homogène G/MN.

Lorsque $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, l'espace homogène G/MN s'identifie à l'espace des variétés stables de $T^1\mathbb{H}^2$ pour le flot géodésique.

6.6.1 Coordonnées de G/MN et sous-ensemble $\Gamma-$invariant

Le diagramme suivant est $G-$équivariant et commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi_{G/N}"] \arrow[d, "\pi_{G/M}"'] & G/N \arrow[d] \\ G/M \arrow[r] & G/MN \end{tikzcd} .$$

Fait 6.18. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact.*

Alors l'application

$$\begin{aligned} G/MN &\longrightarrow \mathcal{F} \times \mathfrak{a} \\ gMN &\longmapsto \big(g\eta_0 \ ; \ \sigma(g, \eta_0)\big), \end{aligned}$$

est un difféomorphisme $G-$équivariant, où l'action de G sur $\mathcal{F} \times \mathfrak{a}$ est la restriction aux coordonnées premières et troisièmes coordonnées de Hopf, de l'action de G sur G/M.

Démonstration : Remarquons que $\mathrm{Stab}(\eta_0, 0) = MN$. Enfin, grâce aux propriétés des coordonnées de Hopf sur G/M (Proposition 4.9) , on en déduit que l'application est bien un difféomorphisme $G-$équivariant. □

6.6.2 Transitivité topologique

On définit l'analogue du sous-ensemble des variétés fortement stables des vecteurs unitaires de $T^1\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ dont l'orbite par le flot géodésique est positivement non-errante.

Définition 6.19. *Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret, Zariski dense. On définit l'ensemble $\Gamma-$invariant suivant de G/MN,*

$$\widetilde{\mathcal{E}}^+ \simeq L_+(\Gamma) \times \mathfrak{a}.$$

Théorème 6.20. *Soit G un groupe de Lie connexe, semisimple, réel linéaire de type non-compact. Soit Γ un sous-groupe discret, Zariski dense de G.*

Alors l'action de Γ sur $\widetilde{\mathcal{E}}^+$ est topologiquement transitive. Plus précisément, pour tout élément loxodromique $\gamma \in \Gamma^{lox}$ tel que $\lambda(\gamma) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, pour tout $x \in \mathfrak{a}$,

$$\overline{\Gamma(\gamma^+, x)} = L_+(\Gamma) \times \mathfrak{a}.$$

C'est l'analogue de la densité des variétés fortement stables des vecteurs périodiques pour le flot géodésique sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Démonstration : Soit $\gamma \in \Gamma^{lox}$ un élément loxodromique tel que $\lambda(\gamma) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$. On prouve d'abord que pour tout $\delta > 0$, pour tous $x, u \in \mathfrak{a}$, pour tout ouvert non vide $\mathcal{U}_+ \subset L_+(\Gamma)$,

$$\Gamma(B(\gamma^+, \delta) \times B(x, \delta)) \cap \mathcal{U}_+ \times B(u, \delta) \neq \emptyset.$$

Quitte à restreindre $\mathcal{U}_+$, on peut supposer que $\mathcal{U}_+ \times \{\gamma^-\} \subset \mathcal{F}^{(2)}$.

Choisissons tout d'abord un ouvert non vide $\mathcal{V}^{(2)} \subset L^{(2)}(\Gamma)$ de manière convenable. Soit $\xi \in \mathcal{U}_+ \cap L_+(\Gamma)$. On choisit $\check{\xi} \in L_-(\Gamma)$ de sorte que

$$\begin{cases} (\xi, \check{\xi}) & \in & L^{(2)}(\Gamma) \\ (\gamma^+, \check{\xi}) & \in & L^{(2)}(\Gamma). \end{cases}$$

Soit $\delta_0 > 0$ tel que

$$\begin{cases} B(\xi, 2\delta_0) \times B(\check{\xi}, 2\delta_0) & \subset & \mathcal{F}^{(2)} \\ B(\gamma^+, 2\delta_0) \times B(\check{\xi}, 2\delta_0) & \subset & \mathcal{F}^{(2)}. \end{cases}$$

Comme $L_+(\Gamma)$ n'a pas de points isolés, un tel δ_0 existe. Posons pour tout $\delta' \in]0, \delta_0]$,

$$\mathcal{V}^{(2)}_{\delta'} := B(\xi, \delta') \times B(\check{\xi}, \delta').$$

D'après le Fait 2.63, la fonction

$$(\check{\xi}_0; \xi_1, \xi_2) \longmapsto \nu(\check{\xi}_0; \xi_1, \xi_2)$$

est continue sur son ensemble de définition. En particulier, elle est continue sur

$$\mathcal{V}^{(2)}_{\delta'} \times B(\gamma^+, \delta').$$

Posons

$$\nu_0 := \nu(\check{\xi}; \xi, \gamma^+).$$

Alors, par continuité, il existe une famille de réels positifs $(\varepsilon_{\delta'})_{\delta' \in]0,\delta_0]}$ avec $\lim_{\delta' \to 0^+} \varepsilon_{\delta'} = 0$ et telle que pour tout $\delta' \in]0, \delta_0]$ et $(\check{\xi}_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathcal{V}^{(2)}_{\delta'} \times B(\gamma^+, \delta')$,

$$\|\nu(\check{\xi}_0; \xi_1, \xi_2) - \nu_0\| \leq \varepsilon_{\delta'}.$$

Fixons $\delta' \in]0, \delta_0]$ de sorte que

$$\varepsilon_{\delta'} \leq \frac{\delta}{3}.$$

Posons $\mathcal{V}^{(2)} := \mathcal{V}^{(2)}_{\delta'}$.

Par hypothèse, $\lambda(\gamma)$ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$. Appliquons la Proposition 6.7 à $\theta = \lambda(\gamma)$ et à l'ouvert non vide $\mathcal{V}^{(2)} \subset L^{(2)}(\Gamma)$. Il existe

(1) un réel $r_0 := r_0(\mathcal{V}^{(2)}, \theta) \in]0, 1[$,

(2) un sous-cône $\mathcal{C}_\theta \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Gamma)$, convexe, fermé, d'intérieur non vide, tel que $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\theta$,

tels que pour tout $r \in]0, r_0]$ pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon_\eta \in]0, r]$ tel que

$$(3 \dim \mathfrak{a} + 2) \sup(C_{r,\varepsilon_\eta}, C_{2r,2\varepsilon_\eta}) \leq \eta/4,$$

et il existe un vecteur $v_\eta \in \mathfrak{a}^+$ tel que pour tout point $y \in v + \mathcal{C}_\theta$, il existe un élément $g_y \in \Gamma$, loxodromique, vérifiant

(a) g_y est $(2r, 2\varepsilon_\eta)-$loxodromique et

$$B(g_y^+, 2\varepsilon_\eta) \times B(g_y^-, 2\varepsilon_\eta) \subset \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-,$$

(b) $\lambda(g_y) \in B(y, \eta)$,

(c) pour tout $\xi \in \mathcal{V}_{12r}(\mathcal{X}(g_y^-))^\complement$ et pour tout $\xi' \in B(\xi, 2\varepsilon_\eta)$ et tout $n \geq 1$

$$\|\sigma(g_y^n, \xi') - n\lambda(g_y) - \nu(g_y, \xi)\| \leq 2C_{2r,2\varepsilon_\eta} \leq \frac{\eta}{6 \dim \mathfrak{a} + 4}.$$

Choisissons $r \in]0, r_0]$ assez petit tel que pour tout $\check{\xi}_0 \in \mathcal{V}_-$,

$$\gamma^+ \in \mathcal{V}_{12r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_0))^\complement.$$

Posons $\eta := \frac{\delta}{3}$. Pour tout $u \in \mathfrak{a}$, comme θ est dans l'intérieur du cône $\mathcal{C}_\theta$, l'intersection

$$\big(u + \mathbb{R}\theta\big) \cap \big(x + \nu_0 + v_\eta + \mathcal{C}_\theta\big)$$

contient une demi-droite de la forme $u + [T, +\infty]\theta$. Considérons un entier $k_u \in \mathbb{Z}$ tel que

$$u + k_u\theta \in x + \nu_0 + v_\eta + \mathcal{C}_\theta.$$

Posons

$$y := u + k_u\theta - \nu_0 - x \in v_\eta + \mathcal{C}_\theta.$$

D'après la Proposition 6.7, il existe un élément $g_y \in \Gamma^{lox}$ vérifiant les points (a),(b),(c). Réécrivons le point (c),

$$\|\sigma(g_y, \gamma^+) - \lambda(g_y) - \nu(g_y, \gamma^+)\| \leq 2C_{2r,2\varepsilon_\eta} \leq \frac{\eta}{6 \dim \mathfrak{a} + 4}.$$

Par choix de η, remarquons que $\frac{\eta}{6 \dim \mathfrak{a}+4} \leq \frac{\delta}{3}$, d'où

$$\sigma(g_y, \gamma^+) - \lambda(g_y) - \nu(g_y, \gamma^+) \in B\Big(0, \frac{\delta}{3}\Big).$$

On utilise le point (b),

$$\lambda(g_y) - y \in B(0, \eta) = B\Big(0, \frac{\delta}{3}\Big).$$

De plus, $\nu(g_y, \gamma^+) = \nu(g_y^-; g_y^+, \gamma^+)$. Or d'après le point (a), $(g_y^-, g_y^+) \in \mathcal{V}^{(2)}$. Et par choix de $\mathcal{V}^{(2)}$,

$$\nu(g_y^-; g_y^+, \gamma^+) - \nu_0 \in B\Big(0, \frac{\delta}{3}\Big).$$

D'où

$$\sigma(g_y, \gamma^+) \in B(y + \nu_0, \delta).$$

Par la relation de cocycle,

$$\begin{aligned}\sigma(g_y\gamma^{-k_u}, \gamma^+) &= \sigma(g_y, \gamma^+) + \sigma(\gamma^{-k_u}, \gamma^+)\\ &= \sigma(g_y, \gamma^+) - k_u\lambda(\gamma)\\ &= \sigma(g_y, \gamma^+) - k_u\theta.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sigma(g_y\gamma^{-k_u}, \gamma^+) \in B(y + \nu_0 - k_u\theta, \delta).$$

Or $y + \nu_0 - k_u\theta = u - x$, d'où

$$\sigma(g_y\gamma^{-k_u}, \gamma^+) + x \in B(u, \delta).$$

Calculons l'action de g_y sur $(\gamma^+ \; ; \; x)$,

$$g_y\gamma^{-k_u}(\gamma^+ \; ; \; x) = (g_y\gamma^+ \; ; \; \sigma(g_y\gamma^{-k_u}, \gamma^+) + x).$$

Enfin, utilisons (a) g_y est $(2r, 2\varepsilon_\eta)-$loxodromique avec

$$B(g_y^+, 2\varepsilon_\eta) \times B(g_y^-, 2\varepsilon_\eta) \subset \mathcal{V}_+ \times \mathcal{V}_-,$$

ainsi que $\gamma^+ \in \cap_{\check{\xi}_0 \in \mathcal{V}_-} \mathcal{V}_{12r}(\mathcal{X}(\check{\xi}_0))^{\complement}$. On en déduit que

$$g_y\gamma^{-k_u}\gamma^+ \in \mathcal{V}_+ \subset \mathcal{U}_+.$$

En particulier,

$$g_y\gamma^{k_u}(B(\gamma^+, \delta) \times B(x, \delta)) \cap \mathcal{U}_+ \times B(u, \delta) \neq \emptyset.$$

$\square$

Bibliography

[AMS95] H. Abels, G. A. Margulis, and G. A. Soĭfer. Semigroups containing proximal linear maps. *Israel J. Math.*, 91(1-3):1–30, 1995.

[Ben96] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)*, 144(2):315–347, 1996.

[Ben97a] Y. Benoist. Groupes linéaires à valeurs propres positives et automorphismes des cônes convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(5):471–474, 1997.

[Ben97b] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. *Geom. Funct. Anal.*, 7(1):1–47, 1997.

[Ben00] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. II. In *Analysis on homogeneous spaces and representation theory of Lie groups, Okayama–Kyoto (1997)*, volume 26 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 33–48. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.

[BG03] E. Breuillard and T. Gelander. On dense free subgroups of Lie groups. *J. Algebra*, 261(2):448–467, 2003.

[BL93] Y. Benoist and F. Labourie. Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables. *Invent. Math.*, 111(2):285–308, 1993.

[BM00] M. B. Bekka and M. Mayer. *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*, volume 269 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[BQ16a] Y. Benoist and J-F. Quint. Central limit theorem for linear groups. *Ann. Probab.*, 44(2):1308–1340, 2016.

[BQ16b] Y. Benoist and J-F. Quint. *Random walks on reductive groups*, volume 62 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, 2016.

[BS18] E. Breuillard and Ç. Sert. The joint spectrum. *ArXiv e-prints*, September 2018.

[BtD85] T. Bröcker and T. tom Dieck. *Representations of compact Lie groups*, volume 98 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[CG02] J-P. Conze and Y. Guivarc'h. Densité d'orbites d'actions de groupes linéaires et propriétés d'équidistribution de marches aléatoires. In *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, pages 39–76. Springer, Berlin, 2002.

[Dal00] F. Dal'bo. Topologie du feuilletage fortement stable. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3):981–993, 2000.

[DG18] N.-T. Dang and O. Glorieux. Topological mixing of the Weyl chamber flow. *ArXiv e-prints*, September 2018.

[Ebe72] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds. I. *Ann. of Math. (2)*, 95:492–510, 1972.

[FK60] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31:457–469, 1960.

[FK83] H. Furstenberg and Y. Kifer. Random matrix products and measures on projective spaces. *Israel J. Math.*, 46(1-2):12–32, 1983.

[GJT98] Y. Guivarc'h, L. Ji, and J. C. Taylor. *Compactifications of symmetric spaces*, volume 156 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[GM89] I. Ya. Goldsheid and G. A. Margulis. Lyapunov exponents of a product of random matrices. *Uspekhi Mat. Nauk*, 44(5(269)):13–60, 1989.

[GR85] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2):187–242, 1985.

[GR07] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Actions of large semigroups and random walks on isometric extensions of boundaries. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(2):209–249, 2007.

[Hel01] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

[Kim06] I. Kim. Length spectrum in rank one symmetric space is not arithmetic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(12):3691–3696, 2006.

[MS19] F. Maucourant and B. Schapira. On topological and measurable dynamics of unipotent frame flows for hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 168(4):697–747, 2019.

[Par18] A. Parreau. La distance vectorielle dans les immeubles affines et les espaces symmétriques. *work in progress*, pages 1–74, 2018.

[Per92] Y. Peres. Domains of analytic continuation for the top Lyapunov exponent. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 28(1):131–148, 1992.

[Pra94] G. Prasad. **R**-regular elements in Zariski-dense subgroups. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 45(180):541–545, 1994.

[Rud87] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[Sam15] A. Sambarino. The orbital counting problem for hyperconvex representations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(4):1755–1797, 2015.

[Ser16] Ç. Sert. *Joint Spectrum and Large Deviation Principles for Random Matrix Products*. PhD thesis, Paris-Saclay, Université, 2016.

[Thi07] X. Thirion. *Sous-groupes discrets de* $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ *et équidistribution dans les espaces symétriques*. PhD thesis, Tours, 2007.

[Tit71] J. Tits. Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque. *J. Reine Angew. Math.*, 247:196–220, 1971.

[Win15] D. Winter. Mixing of frame flow for rank one locally symmetric spaces and measure classification. *Israel J. Math.*, 210(1):467–507, 2015.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Titre : Dynamique d'action de groupes dans des espaces homogènes de rang supérieur et de volume infini

Mot clés : groupe de Lie semisimple, actions de groupe, rang supérieur, dynamique topologique, vecteur de Lyapunov, cône limite de Benoist

Resumé : Soit G un groupe de Lie semisimple (de rang supérieur) et Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G (de covolume infini). Dans cette thèse, on traite de deux questions reliées au *cône limite de Benoist* de Γ : l'une de marche aléatoire et l'autre de mélange topologique du flot directionnel des chambres de Weyl.

Dans l'introduction, on énonce les résultats principaux de cette thèse dans leur contexte. Le second chapitre comporte des rappels sur les groupes de Lie et les éléments loxodromiques. Dans le troisième chapitre, on réalise tous les points de l'intérieur du cône limite par des vecteurs de Lyapunov. Dans le quatrième chapitre, on construit des coordonnées locales de G ainsi que des outils cruciaux pour la suite. Dans le cinquième chapitre, on introduit les ensembles invariants naturels de G. Dans le dernier chapitre de cette thèse, on prouve le critère de mélange topologique des flots directionnels réguliers des chambres de Weyl obtenu avec O. Glorieux et on généralise partiellement ce critère de mélange à $\Gamma\backslash G$ pour une classe de groupes de Lie incluant $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{SO}_0(p,p+2)$.

Title : Dynamics of group action on homogeneous spaces of higher rank and infinite volume

Keywords : semisimple Lie groups, group actions, higher rank, topological dynamics, Lyapunov vector, Benoist limit cone

Abstract : Let G be a semisimple Lie group (of higher rank) and Γ a Zariski dense subgroup of G (of infinite covolume). In this thesis, we discuss two questions related to the *Benoist limit cone* of Γ : one concerns random walks, the other topological mixing of the directional Weyl chamber flow.

In the introduction, we state the main results of this thesis in their context. In the second chapter, we recall some general facts about Lie groups and loxodromic elements. In the third chapter, we prove that every point of the interior of the limit cone is a Lyapunov vector. In the fourth chapter, we construct local coordinates of G and give key tools for the remaining parts. In the fifth chapter, we introduce the invariant subsets of G. In the last chapter of this thesis, we prove the topological mixing criterion of regular directional Weyl chamber flow obtained with O. Glorieux and we generalize this criterion to $\Gamma\backslash G$ for a class of Lie groups including $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{SO}_0(p,p+2)$.