Présentation analytique

DANG Nguyen-Thi

Sommaire

Dang(nom) Nguyen-Thi(prénom)

Neuenheimer Landstraße 5
69120 Heidelberg, Baden-Würtemberg, Allemagne
(+33) 6-51-91-14-45
dangnguyenthi@free.fr
Nationalité : Française

Mots clés : actions de groupes, groupes de Lie semisimples, dynamique topologique, flots des chambres de Weyl, spectre d'un produit de matrices aléatoires, cône de Benoist, produits d'éléments loxodromiques.

Cursus Scientifique et professionnel

1/10/2022– **Post-Doctorante au Laboratoire de Mathématique d'Orsay**, *financée par le programme Cofund MathInGreaterParis* , Orsay , France.

1/10/2019–30/09/2022 **Post-Doctorante à l'Université de Heidelberg**, *Équipe de recherche "Asymptotic invariants and limits of groups and spaces"*, Heidelberg , Allemagne.

2016–2019 **Doctorante à l'IRMAR**, *Équipe théorie ergodique, sous la direction de François Maucourant et Barbara Schapira*, Rennes , France.

2015–2016 **M2 de mathématiques fondamentales à Paris Diderot (TB)**, *Paris Diderot*, France.

02/2016–07/2016 **Mémoire de M2**, *Laboratoire Paul Painlevé*, Lille, France.
Sous la direction de Fanny Kassel, CNRS : "Actions affines propres en dimension 3, d'après Goldman-Labourie-Margulis"

2015 **Agrégation de Mathématiques, option probabilités**.

2014–2016 **Normalienne du concours 3A**, *Ecole Normale Supérieure de Cachan* , Cachan, France.

03/2013–07/2013 **Mémoire de M1**, *IRMAR*, Rennes, France.
Sous la direction de Barbara Schapira : "Autour du théorème d'uniformisation et des métriques hyperboliques"

2013–2014 **M1 de Mathématique (TB)**, *Ecole Normale Supérieure de Cachan*, Cachan, France, financée par la bourse Hadamard (master).

02/2012–07/2012 **Mémoire de L3**, *Cmla*, Cachan, France.
Dans la section mécanique des fluides du Cmla sous la direction de Laure Quivy : "Traitement du vide dans l'écoulement des fluides"

2012–2013 **L3 de Mathématique (B)**, *Ecole Normale Supérieure de Cachan* , Cachan, France, en tant qu'auditrice libre.

Concours MCF et autres

Pendant la campagne MCF 2021, j'ai été auditionnée
- au poste 4404 du LAGA (Villetaneuse) et classée 4ème.
- au poste 71 de l'IUT de Sceaux et classée 7ème.

J'ai obtenu une bourse post-doctorale du programme `https://www.mathingp.fr` où je serais affectée pendant 2 ans au Laboratoire Mathématique d'Orsay, à partir d'octobre 2022.

Liste de publications

Pré-publication

2021 **Equidistribution and counting of maximal flats**, Soumis, Arxiv `https://arxiv.org/abs/2202.08323`, co-écrit avec Jialun Li.

Résumé traduit : Soit G un groupe de Lie semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ un réseau cocompact, sans éléments de torsion. Partant du constat dû à Selberg que les orbites périodiques de flot des chambres de Weyl réguliers vivent sur des tores plats périodiques de l'espace des chambres de Weyl, nous prouvons que ces tores plats périodiques s'équidistribuent exponentiellement vite vers la mesure quotient de la mesure de Haar. Cette formule d'équidistribution nous permet d'en déduire un théorème des géodésiques primitives en rang supérieur. Ces résultats de comptages et d'équidistribution restent encore vrai pour le cas non cocompact, covolume fini pour $G = \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ et $\Gamma < \mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ de sous-groupes d'indice fini.

Publications

2021 **Topological mixing of positive diagonal flows**, *Accepté pour publication à* Israël Journal of Maths, sur arXiv 2011.12900 ou sur HAL hal-03010830, version 3.

Résumé: Soit G un groupe de Lie semisimple sans facteur compact et $\Gamma < G$ un sous-groupe discret, Zariski dense. Nous étudions la dynamique topologique des flots diagonaux positifs de $\Gamma\backslash G$. Nous prolongeons les coordonnées de Hopf en coordonnées de Bruhat-Hopf de G, ce qui nous donne le cadre pour estimer la partie elliptique des produits génériques de grands éléments loxodromiques. En réécrivant des résultats de Guivarc'h-Raugi en coordonnées de Bruhat-Hopf, nous obtenons une partition finie de la pré-image dans $\Gamma\backslash G$ de l'ensemble non-errant des flots de chambre de Weyl mélangeants, en sous-ensembles dynamiquement conjugués. Nous prouvons une condition nécessaire de mélange topologique et lorsque la composante connexe de l'identité du centralisateur du sous-groupe de Cartan est abélien, nous prouvons que cette condition est suffisante.

2020 **Topological mixing of the Weyl chamber flow**, Ergodic Theory and Dynamical Systems, co-écrit avec O. Glorieux.

Résumé traduit: Dans ce papier, nous étudions les propriétés de dynamique topologique des actions des flots directionnels des chambres de Weyl sur l'espace des chambres de Weyl d'un espace symétrique de volume infini et de rang quelconque. Nous obtenons une condition nécessaire et suffisante de mélange topologique pour les flots directionnels réguliers.

2019 **Dynamique d'action de groupes dans des espaces homogènes de rang supérieur et de volume infini**, *Thèse de l'Université de Rennes 1*, sous la direction de Barbara Schapira et François Maucourant, sur HAL :*tel-02301728, version 1.*

Résumé: Soit G un groupe de Lie semisimple (de rang supérieur) et Γ un sous-groupe discret Zariski dense de G (de covolume infini). Dans cette thèse, on traite de deux questions reliées au *cône limite de Benoist* de Γ : l'une de marche aléatoire et l'autre de mélange topologique du flot directionnel des chambres de Weyl. Dans l'introduction, on énonce les résultats principaux de cette thèse dans leur contexte. Le second chapitre comporte des rappels sur les groupes de Lie et les éléments loxodromiques. Dans le troisième chapitre, on réalise tous les points de l'intérieur du cône limite par des vecteurs de Lyapunov. Dans le quatrième chapitre, on construit des coordonnées locales de G ainsi que des outils cruciaux pour la suite. Dans le cinquième chapitre, on introduit les ensembles invariants naturels de G. Dans le dernier chapitre de cette thèse, on prouve le critère de mélange topologique des flots directionnels réguliers des chambres de Weyl obtenu avec O. Glorieux et on généralise partiellement ce critère de mélange à $\Gamma\backslash G$ pour une classe de groupes de Lie incluant $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \mathrm{SO}_0(p, p+2)$.

Actes de séminaires

2022 **MFO report: Mini-Workshop Anosov^3**, *page internet du rapport*, rapporteure du mini-workshop.

J'ai collecté dans ce rapport les résumés des exposés (dont le mien) qui ont eu lieu lors du Mini-Workshop 2149a Anosov^3 organisé à Oberwolfach du 5 au 11 décembre 2021 par Benjamin Delarue (né Küster), Colin Guillarmou, Maria Beatrice Pozzetti et Tobias Weich.

Exposés à venir

18/07/2022–22/07/2022 **Session spéciale Déformations de structures géométriques**, *Congrès joint AMS-SMF-EMS Grenoble*, Grenoble, France.
Courte contribution : à venir

8/04/2022 **Séminaire de géométrie**, *Laboratoire Paul Painlevé*, Lille, France.
Comptage et équidistribution de tores plats

14/03/2022 **Séminaire de géométrie**, *Institut Élie Cartan de Lorraine*, Nancy, France.
Comptage et équidistribution de tores plats

4/03/2022 **Séminaire de géométrie**, *IMB*, Bordeaux, France.
Comptage et équidistribution de tores plats

24/02/2022 **Séminaire de topologie et dynamique**, *LMO*, Orsay, France.
Comptage et équidistribution de tores plats

Exposés passés

3/02/2022 **Séminaire de géométrie, algèbre, dynamique et topologie**, *UB*, Dijon, France.
Comptage et équidistribution de tores plats en rang supérieur

24/01/2022 **Séminaire de théorie ergodique en ligne**, *IRMAR*, Rennes, France.
Comptage et équidistribution de tores plats

5/12/2021–11/12/2021 **Anosov 3** , *Mini-workshop*, Oberwolfach, Allemagne.
Topological mixing of positive diagonal flows

5/11/2021 **Journée de géométrie de Créteil**, *LAMA*, Créteil, France.
Equidistribution and counting of maximal flats

14/09/2021 **Séminaire de systèmes dynamiques et géométrie**, *LAREMA*, Angers, France.
Équidistribution et comptages de plats maximaux

8/09/2021 **Hyperbolic dynamical systems and resonances**, *Conférence organisée par Colin Guillarmou*, Porquerolles, France.
Equidistribution and counting of maximal flats

15/04/2021 **Séminaire francophone Groupe et Géométrie**, *Institut Fourier*, en ligne sur BBB.
Mélange topologique des flots diagonaux positifs

29/10/2020 **Ergodic theory and dynamical systems Seminar**, *Université de Bristol*, Bristol, Royaume-Uni.
Topological mixing of the Weyl chamber flow

15/06/2020 **Séminaire HORUS de Strasbourg**, *IRMA*, Strasbourg, France.
Mélange topologique des flots hyperboliques homogènes

14/02/2020-15/02/2020 **Sophus Lie 2020**, *Université de Padeborn*, Padeborn, Allemagne.
Courte contribution : Topological dynamics of the Weyl chamber flow

25/11/2019–27/11/2019 **Paroles aux Jeunes Chercheuses et Chercheurs en Géométrie et Dynamique**, *Université de Nancy*, Nancy, France.
Titre : Mélange topologique du flot directionnel des chambres de Weyl

11/11/2019 **Séminaire de Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques**, *Université de Zurich*, Zurich, Suisse.
Titre : Topological Mixing of the Weyl Chamber Flows

6/11/2019 **Séminaire de Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques**, *LAGA, Université de Paris 13*, Villetaneuse, France.
Titre : Mélange topologique du flot directionnel des chambres de Weyl

14/10/2019–19/10/2019 **Arbeitsgemeinschaft**, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, Oberwolfach, Allemagne.
Titre : The Top Lyapunov Exponent

8/10/2019 **Séminaire de l'équipe de Théorie Spectrale**, *Université de Padeborn*, Padeborn, Allemagne.
Titre : Topological Mixing of the Weyl Chamber Flows

23/09/2019 **Soutenance de thèse**, *IRMAR*, Rennes, France.
Titre : Dynamique d'action de groupes dans des espaces homogènes de rang supérieur et de volume infini

13/06/2019 **Séminaire de Systèmes dynamiques, probabilités et statistique** , *Université de Brest et Vannes*, Quimper, France.
Titre : Mélange topologique du flot directionnel des chambres de Weyl

3/05/2019 **Séminaire de Géométrie de Nantes**, *Université de Nantes*, Nantes, France.
Titre : Mélange topologique du flot directionnel des chambres de Weyl

7/02/2019 **Séminaire de Géométrie d'Heidelberg**, *Université d'Heidelberg*, Heidelberg, Allemagne.
Titre : Topological Mixing of the Weyl Chamber Flows

6/02/2019 **Junior Geometry Seminar in Heidelberg**, *University of Heidelberg*, Heidelberg, Allemagne.
Titre: Some problems of dynamics in higher rank

12/12/2018 **Rencontre de l'ERC IPPFLOWS**, *Université Paris 11*, Orsay, France.
Titre : Topological Mixing of the Weyl Chamber Flows

9/04/2018 **Séminaire de l'équipe de théorie ergodique**, *IRMAR*, Rennes, France.
Session spéciale doctorants : Quelques problèmes en dynamique en rang supérieur

1/02/2018 **Journées Louis Antoines**, *IRMAR*, Rennes, France.
Exposé : Perturbations singulières : l'analyse géométrique de Fenichel

31/05/2018 **Séminaire des doctorants**, *IRMA*, Strasbourg, France.
Exposé : Quelques problèmes en dynamique en rang supérieur

15/03/2018 **Séminaire doctorants d'Algèbre et Géométrie**, *IRMAR*, Rennes, France.
Session surprise : Comment jouer au ping-pong

07/11/2017 **Séminaire des doctorants**, *Laboratoire Jean Leray*, Nantes, France.
Exposé : Marches aléatoires dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ pour $n > 2$.

26/10/2017 **Séminaire doctorants d'Algèbre et Géométrie**, *IRMAR*, Rennes, France.
Exposé : Marches aléatoires dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ pour $n > 2$.

Participation à des conférences

10/01/2022–14/01/2022 **Workshop on theta positivity**, *IWH ou hybride*, Heidelberg, Allemagne.
École d'hiver

12/12/2021–17/12/2021 **Aussois 2020-2021**, *centre Paul Langevin*, Aussois, Royaume-Uni.
École d'hiver

5/12/2021–11/12/2021 **Anosov 3** , *Mini-workshop*, Oberwolfach, Allemagne.
Organisé par Benjamin Küster, Tobias Weich, Beatrice Pozzetti, Colin Guillarmou

6/09/2021–10/09/2021 **Hyperbolic dynamical systems and resonances**, Porquerolles, France.
Conférence organisée par Colin Guillarmou

21/06/2021–25/06/2021 **École finistérienne en systèmes dynamiques**, Brest, France.
École d'été du GDR Platon

4/2/2021 **a hyperbolic day online**, *en ligne*.
Conférence en ligne

11/01/2021–15/01/2021 **Topics at the interface of low dimensional group actions and geometric structures**, *en ligne*, Université de Singapour, Singapour.
Conférence

7/12/2020-9/12/2020 **Paroles aux jeunes chercheurs et chercheuses**, *en ligne organisé par l'IRMAR*, Rennes, France.
GDR Platon

3/08/2020–6/08/2020 **Dynamics on your screen**, *conférence en ligne*.

8/07/2019–19/07/2019 **Aspects of Geometric Group Theory**, *IHES*, Bures-sur-Yvette, France.
École d'été

27/06/2019–5/07/2019 **Dynamics of Parabolic Flows**, *Université de Zurich*, Zurich, Suisse.

27/05/2019–31/05/2019 **Dynamics of Group Actions**, Cetraro, Italie.

5/12/2018–7/12/2018 **Borel seminar**, Les Diablerets, Suisse.
Topology and Dynamics in the Swiss Alps

11/06/2018–14/06/2018 **Workshop**, *Université du Luxembourg*, Esch-sur-Alzette, Luxembourg.
Workshop sur la géométrie pseudo-riemannienne et les représentations Anosov

juin 2017 **Semestre Lebesgue en dynamique et géométrie**, *IRMAR*, Rennes, France.
La quasi-totalité du semestre Lebesgue

Enseignement

été 2020 **7 cours RTG**, *RTG en ligne*, Karlsruhe-Heidelberg, Allemagne.
Cours sur les exposants de Lyapunov et l'entropie

2018–2019 **monitorat**, *IRMAR*, Rennes, France.
TD d'Analyse en L1 bio avec TP sur Python, TD d'Analyse pour Rennes 2 en L1 MIASHS

2017–2018 **monitorat**, *IRMAR*, Rennes, France.
TD d'Analyse en L1 bio avec TP sur Python, TD d'Analyse pour Rennes 2 en L1 MIASHS

2016–2017 **monitorat**, *IRMAR*, Rennes, France.
TD d'Analyse en L1 bio, vacations en L1 à l'IUT en GMP, TD d'Analyse pour les L1 maths

Activités connexes et responsabilités

6/2020– **Participation au laboratoire Hegl**, *co-organisé avec Brice Loustau, Valentina Disarlo, Menelaos Zikidis et Anja Randecker*, Heidelberg, Allemagne.
Laboratoire de géométrie expérimentale

hiver 2020-2021 **Organisatrice du 'Junior Geometry Seminar'**, *équipe de géométrie différentielle et géométrie symplectique*, Heidelberg, Allemagne.
Séminaire à destination des étudiants de licence et master des deux équipes

18/06/2018-20/06/2018 **Participation à MathC2+**, *Ens Rennes*, Rennes, France.

5/10/2018–7/10/2018 **Participation aux fêtes de la Science**, Rennes, France.

2017–2018 **Co-organisatrice du séminaire des doctorants d'Algèbre et Géométrie**, *IRMAR*, Rennes, France.

Les travaux de recherche que j'ai l'intention de mentionner à une éventuelle audition sont encadrés en rouge dans la suite.

2 Rapport sur travaux

Mes activités de recherche relient les systèmes dynamiques, les groupes de Lie semisimples et les actions de groupes. J'étudie la dynamique d'actions de groupes dans des espaces homogènes, c'est-à-dire les propriétés chaotiques de flots ou de groupes agissant sur des quotients de groupes de Lie.

Fixons un groupe de Lie G, réel linéaire, connexe, semisimple, de type non-compact, éventuellement de rang supérieur, par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ où $n \geq 3$. Soit Γ un sous-groupe discret de G, pas forcément un réseau, H un sous-groupe fermé connexe non compact de G et $\phi^t \subset H$ un sous-groupe à un paramètre. On peut se demander quels sont les ensembles fermés invariants minimaux pour les actions $\Gamma\backslash G \curvearrowleft \phi^t$ ou $\Gamma \curvearrowright G/H$ et s'ils coïncident avec ceux où la dynamique revient infiniment souvent dans un compact. Une fois qu'on s'est placé dans un bon ensemble, on peut étudier le comportements des orbites : si elles sont fermées ou denses dans des sous-ensembles invariants et enfin, s'il y a mélange topologique, c'est-à-dire si pour tout couple ouvert non vide, il existe un instant à partir duquel le système dynamique va mélanger le premier ouvert dans l'espace de sorte à toujours intersecter le second.

J'utilise la théorie des marches aléatoires sur les groupes de Lie, l'intuition venant des espaces symétriques de courbure négative ou nulle ainsi que les outils venant de la théorie ergodique en volume fini ou infini pour mieux comprendre ces actions.

Lorsque le quotient $\Gamma\backslash G$ est de volume fini, l'approche par la théorie des représentations unitaires sur les groupes de Lie fournit de nombreux résultats. Le théorème de Howe-Moore [HM79] permet d'en déduire que pour tout réseau irréductible Γ de G, pour tout sous-groupe fermé non compact H, l'action est mélangeante pour la mesure de Haar. En particulier, puisque celle-ci charge les ouverts, l'action est topologiquement mélangeante.

Considérons un tore déployé maximal ou sous-groupe de Cartan A de G, un sous-groupe compact maximal K, un sous-groupe unipotent N, une A^+ chambre de Weyl, tels qu'on dispose d'une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$ et de Cartan $G = KA^+K$. Notons A^{++} l'intérieur de la chambre de Weyl et M le sous-groupe centralisateur de A dans K, ainsi que $\mathfrak{a}$ le sous-espace de Cartan associé à A et $\mathfrak{a}^+ := \log A^+$.

Question 2.1. *Que peut-on dire sur les propriétés chaotiques des actions de sous-groupes à un paramètre de A sur $\Gamma\backslash G$, lorsque Γ est plus 'petit' qu'un réseau ?*

Une grande partie de ma thèse porte sur les actions de sous-groupes à un paramètres particuliers de A sur $\Gamma\backslash G$ et $\Gamma\backslash G/M$, les flots des chambres de Weyl. Ce sont les flots $(\phi_\theta^t)_{t\in\mathbb{R}} := \exp(\mathbb{R}\theta)$ paramétrés par des éléments non nuls $\theta \in \mathfrak{a}^+$ de la chambre de Weyl. Il se trouve qu'on peut toujours ramener l'étude de l'action de tout sous-groupe à un paramètre de A sur $\Gamma\backslash G$ à un flot de chambre de Weyl. Rappelons que le rang de G est la dimension de A.

Lorsque $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, alors $\mathfrak{a} = \mathbb{R}$ et l'action du flot des chambres de Weyl ϕ_1^t sur $\Gamma\backslash G/M$ s'identifie à l'action du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la surface hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$. Celle-ci a été fortement étudiée entre autres par Hedlund, Hopf, Anosov, Bowen, Patterson, Sullivan, Margulis, Eberlein... En particulier, d'après F. Dal'bo [Dal00], le flot géodésique est topologiquement mélangeant sur son ensemble non errant si et seulement si le spectre des longueurs de $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ est non-arithmétique. Cette dernière condition est vérifiée lorsque Γ est Zariski dense (Cf Y. Benoist [Ben00] et I. Kim [Kim06]).

Question 2.2. *Que se passe-t-il lorsque le rang de G est supérieur ou égal à 2 ?*

Plaçons-nous maintenant en rang supérieur, i.e. $\dim A \geq 2$, et supposons que Γ est discret, Zariski dense de covolume infini. Donnons quelques exemples de tels groupes :

- les sous-groupes 'minces' ("thin groups"). D'après [KLLR19], un sous-groupe Γ Zariski dense dans G est mince lorsque qu'il est un sous-groupe d'indice infini d'un réseau de G.
- les images des représentations Anosov, représentations fidèles et discrètes de groupes hyperboliques sans torsion qui "généralisent" en rang supérieur la notion de convexe cocompact, cf. [BPS16] ou [GW12] pour des définitions plus précises.
- les sous-groupes Borel Anosov : images d'un cas particulier de représentations Anosov.

Dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, lorsque n congru à 2 modulo 4, K. Tsouvalas [Tso19] prouve que les groupes hyperboliques sans torsion admettant une représentation Borel Anosov sont soit virtuellement libres, soit virtuellement des groupes de surface. Cela conforte l'idée plus générale que les sous-groupes Borel Anosov sont une classe restreinte de sous-groupes discrets Zariski dense.

Les projections suivantes jouent le même rôle que la distance au point base dans le plan hyperbolique et la longueur de translation d'une isométrie de $\mathbb{H}^2$. Par décomposition de Cartan ou décomposition en valeurs singulières, pour tout $g \in G$, il existe un unique élément $\kappa(g) \in \mathfrak{a}^+$ tel que $g \in Ke^{\kappa(g)}K$. L'application ainsi définie $\kappa : G \to \mathfrak{a}^+$ est la projection de Cartan. Elle correspond dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ à la distance entre le point base et son image par g dans $\mathbb{H}^2$. La projection de Jordan est l'application $\lambda : G \to \mathfrak{a}^+$ qui encode le spectre des éléments de G. Dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, la projection de Jordan d'une isométrie de $\mathbb{H}^2$ est sa longueur de translation.

Dans l'article [Ben97], Y. Benoist étudie pour tout sous-semigroupe Γ, son cône limite que j'appelais dans ma thèse *cône de Benoist*, le plus petit cône fermé de $\mathfrak{a}^+$ contenant $\lambda(\Gamma)$. On le note

$$\mathcal{C}(\Gamma) := \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{R}_+ \lambda(\gamma)}.$$

Il prouve que lorsque Γ est Zariski dense, son cône de Benoist est un fermé convexe d'intérieur non vide.

Mes travaux comportent deux types de résultats reliés au cône limite, l'un porte sur les marches aléatoires l'autre sur les flots des chambres de Weyl.

Dans toute la suite, G est un groupe de Lie, réel linéaire, connexe, semisimple, sans facteur compact de rang supérieur et dans cette partie, $\Gamma < G$ est un sous-groupe discret, Zariski dense de covolume infini.

2.1 Marches aléatoires

Soit μ une mesure de probabilité sur G. Considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d de loi μ. Le comportement des produits de matrices aléatoires $(X_1 ... X_n)_{n \geq 1}$, dans les décompositions usuelles ainsi qu'en projection de Cartan et Jordan ont intéressé entre autres Furstenberg, Kesten, Oseledets, Kifer, Goldsheid, Guivarc'h, Margulis, Le Page, Raugi, Conze, Bougerol...

Le théorème de Furstenberg–Kesten décrit la croissance exponentielle des valeurs singulières des produits de matrices aléatoires [FK60]. Soit μ une mesure de probabilité à support Zariski dense dans G de premier moment fini (i.e. tel que $\int_G \|\kappa(g)\| d\mu(g) < +\infty$), alors

$$\frac{1}{n} \kappa(X_n ... X_1) \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \overrightarrow{\lambda}_\mu \in \mathfrak{a}^+.$$

La limite $\overrightarrow{\lambda}_\mu$ ainsi définie est le *vecteur de Lyapunov* de la marche aléatoire i.i.d de loi μ. Notons $\mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{M}^2_Z(\Gamma)$) l'ensemble des mesures de probabilités à support dans Γ, dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense et de premier moment fini (resp. de second moment fini i.e. tel que $\int_G \|\kappa(g)\|^2 d\mu(g) < +\infty$). Ç. Sert a prouvé dans sa thèse [Ser16] que pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^2_Z(\Gamma)$, alors

$$\overrightarrow{\lambda}_\mu \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma_\mu).$$

J'ai réalisé l'intérieur du cône limite par des vecteurs de Lyapunov.

Théorème 2.3. *L'application (continue) ci-dessous est* surjective.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\lambda} : \mathcal{M}^2_Z(\Gamma) &\longrightarrow \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma) \\ \mu &\longmapsto \overrightarrow{\lambda}_\mu. \end{aligned}$$

2.2 Mélange topologique du flot des chambres de Weyl

Un élément $g \in G$ est dit *loxodromique* lorsque sa projection de Jordan $\lambda(g)$ est dans l'intérieur de la chambre de Weyl, c'est-à-dire lorsque ses valeurs propres sont toutes simples et de norme distinctes. On peut remarquer qu'un flot directionnel régulier ϕ^t_θ admet une orbite périodique dans $\Gamma\backslash G/M$ si et seulement si il existe un élément loxodromique $\gamma \in \Gamma$ tel que $\lambda(\gamma) \in \mathbb{R}^*_+\theta$. Ainsi, l'intersection $\mathcal{C}(\Gamma) \cap \mathfrak{a}^{++}$ correspond au plus petit cône relativement fermé de $\mathfrak{a}^{++}$ engendré par les directions θ pour lesquelles ϕ^t_θ admet une orbite périodique dans $\Gamma\backslash G/M$.

Relions maintenant le comportement du flot des chambre de Weyl au cône limite.

Théorème 2.4. *Soit $\theta \in \mathfrak{a}^+$.*

1.) S'il existe une $\phi^t_\theta-$orbite non-divergente, alors $\theta \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

2.) S'il existe une $\phi^t_\theta-$orbite dense dans sa $A-$orbite et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, alors θ est dans l'intérieur du cône limite.

Notons $\Omega \subset \Gamma\backslash G/M$ le plus petit sous-ensemble fermé A-invariant contenant toutes les orbites périodiques de tous les flots directionnels réguliers qui en admettent. J-P. Conze - Y. Guivarc'h dans [CG02] prouvent qu'il existe des $A-$orbites denses dans Ω. Cet ensemble est une généralisation de l'ensemble non-errant pour le flot géodésique dans $T^1\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$. Dans le cas des sous-groupes Ping-Pong de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, X. Thirion [Thi09] prouve le mélange pour une mesure de Radon de support Ω pour le flot défini par le "vecteur de croissance" introduit par J-F. Quint dans [Qui02]. A. Sambarino [Sam15] a lui aussi obtenu le mélange en mesure pour toutes les directions de l'intérieur du cône limite lorsque Γ est un sous-groupe discret Borel Anosov Zariski dense.

Avec Olivier Glorieux, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante de mélange.

Théorème 2.5 ([DG20]). *Soit $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$.*
Le système dynamique (Ω, ϕ^θ_t) est topologiquement mélangeant si et seulement si θ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.

2.3 Mélange topologique des flots diagonaux positifs

Notons Ω_G la préimage dans $\Gamma\backslash G$ du sous-ensemble Ω par la projection $\Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash G/M$. L'action à droite de ϕ^θ_t sur $\Gamma\backslash G$ lorsque $\theta \in \mathfrak{a}^+$ est appelé *flot diagonal*. Lorsque θ est dans la chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^{++}$, on dit que c'est un *flot diagonal positif*. Observons que les flots diagonaux positifs factorisent dynamiquement les flots réguliers des chambres de Weyl. Dans le cas de $\mathrm{SO}(n,1)_0$, ces flots correspondent au flot des repères géodésique. En 2015, A. Mohammadi–H. Oh [MO15] prouvent lorsque Γ est géométriquement fini et son exposant critique est assez grand, le mélange en mesure du flot des repères géodésique, avec vitesse exponentielle de convergence, pour la relevée de la mesure de Bowen–Margulis–Sullivan. D. Winter prouve en 2015 [Win15] le mélange pour lorsque Γ admet une mesure de Bowen–Margulis–Sullivan fini. En 2016 [Win16] il démontre le mélange, avec vitesse exponentielle de convergence, lorsque Γ est convexe cocompact. Enfin, en 2020, D. Winter–P. Sarkar [SW20] généralisent le résultat de A. Mohammadi–H. Oh pour tous les groupes discrets géométriquement finis. Comme la mesure considérée charge la préimage de l'ensemble non-errant pour le flot géodésiques, ces résultats de mélange en mesure entrainent le mélange topologique pour les sous-groupes discrets convexes cocompact, géométriquement finis et enfin ceux dont la mesure de Bowen–Margulis–Sullivan est finie. Lorsque Γ est Zariski dense, discret dans G, F. Maucourant–B. Schapira en 2019 [MS19] prouvent le mélange topologique.

Dans un travail [Dan21] accepté pour publication, je généralise le critère de mélange obtenu avec O. Glorieux à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(2n), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{S0}(p,p+2)^0$ et plus généralement dès que M est abélien. Lorsque M est abélien et connexe, j'obtiens le même critère de mélange topologique pour Ω_G.

Théorème 2.6 ([Dan21])**.** *Soit $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$ et supposons que M est* abélien et connexe. *Alors le système dynamique $(\Omega_G, \phi_t^\theta)$ est topologiquement mélangeant si et seulement si θ est dans l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$.*

Lorsque M n'est pas connexe, Y. Benoist [Ben05] ainsi que Y. Guivarc'h-A. Raugi [GR07] ont construit un sous-groupe distingué d'indice fini $M_\Gamma \triangleleft M$, *le groupe des signes*, à partir des parties elliptiques des éléments loxodromiques de Γ. Ils prouvent que le groupe des signes contient la composante connexe de l'identité M_0 de M. Je démontre que Ω_G admet une partition en en M/M_Γ sous-ensembles AM_Γ-invariants à droite qui sont tous dynamiquement conjugués pour les flots diagonaux.

Théorème 2.7 ([Dan21])**.** *Il existe une partition $(\Omega_{[m]})_{[m]\in M/M_\Gamma}$ de Ω_G tels que*

(a) chaque $\Omega_{[m]}$ est AM_Γ-invariant à droite et un fibré M_Γ-principal sur Ω;

(b) pour tout $\theta \in \mathfrak{a}^+$, les systèmes dynamiques $\{(\Omega_{[m]}, \phi_\theta^t)\}_{[m]\in M/M_\Gamma}$ sont deux à deux dynamiquement conjugués;

(c) supposons $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$. Si $(\Omega_{[e_M]}, \phi_\theta^t)$ est topologiquement mélangeant, alors $\theta \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$.

De plus, lorsque M_0 est abélien et $\theta \in \mathfrak{a}^{++}$, alors la réciproque de (c) est vraie :

(d) $(\Omega_{[e_M]}, \phi_\theta^t)$ est topologiquement mélangeant si et seulement si $\theta \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma)$.

En particulier, la condition nécessaire et suffisante de mélange est vraie pour les groupes de Lie simples déployés (le rang réel de A égal à la dimension complexe de la sous-algèbre de Cartan du groupe de Lie complexifié) dont font partie $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}), \mathrm{SO}_0(p,p), \mathrm{SO}_0(p,p+1)$.

F. Labourie [Lab06] a prouvé que M_Γ est trivial lorsque $\Gamma < \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ est l'image d'une représentation Hitchin : un cas particulier de représentation Borel Anosov. Il découle des points (a) et (b) du Théorème 2.7 qu'il y a 2^{n-1} sous-ensembles disjoints A-invariants dans $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ sur lesquels la dynamique des flots diagonaux est la même.

Pour le cas particulier des sous-groupes discrets Borel Anosov, M. Lee–H. Oh [LO20] obtiennent indépendamment une décomposition A-ergodique des préimages dans $\Gamma\backslash G$ des mesures

BMS sur $\Gamma\backslash G/M$. Ils prouvent que ces mesures sont AM_Γ-quasi-invariantes et que la décomposition est paramétrée par M/M_Γ, ce qui va bien dans le sens des points (a) et (b) du Théorème 2.7. Enfin, M. Chow–P. Sarkar [CS21] obtiennent le mélange local pour les mesures construites par M. Lee–H. Oh.

Rappelons [Tso19] qu'au moins pour les $\mathrm{SL}(4m+2,\mathbb{R})$ où $m \geq 1$, ces sous-groupes sont virtuellement libres ou virtuellement des groupes de surface.

3 Projet de recherche

Je m'intéresse toujours, dans la continuité de ma thèse, aux propriétés dynamiques des flots des chambres de Weyl régulier, au cône limite des sous-groupes discrets Zariski dense ainsi qu'aux marches aléatoires sur les groupes de Lie.

La première partie de mon projet de recherche concerne une collaboration en cours avec Jialun Li sur un problème de comptage. Soit $G = \mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ où $d \geq 2$, considérons un tore déployé maximal $A = \{diag(a_1, ..., a_d) \mid \prod_{1\leq i\leq d} a_i = 1\}$, un sous-groupe compact maximal $K = \mathrm{SO}(d,\mathbb{R})$ et notons $M := Z_K(A)$ le centralisateur de A dans K. Choisissons une chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}^+ = \{diag(a_1 \geq ... \geq a_d) \mid \sum_{1\leq i\leq d} a_i = 0\}$ dans $Lie(A)$. Soit $\Gamma < G$ un sous-groupe discret de G. Les flots des chambres de Weyl sont les flots $(\phi^t_\theta)_{t\in\mathbb{R}} := \exp(\mathbb{R}\theta)$ paramétrés par des éléments non nuls $\theta \in \mathfrak{a}^+$ de la chambre de Weyl agissant par multiplication à droite sur $\Gamma\backslash G/M$. Grâce aux travaux de Selberg et Spatzier, lorsque $\Gamma < G$ est cocompact, les orbites périodiques de flots des chambres de Weyl régulier vivent sur ce qu'on appelle des *tores plats périodiques maximaux* : des A-orbites à droite compactes de $\Gamma\backslash G/M$. Nous nous intéressons à l'asymptotique du nombre de tores plats périodiques maximaux et à leur équidistribution dans $\Gamma\backslash G/M$ lorsque leur systole tend vers l'infini. Lorsque $\dim A = 1$, cela revient à étudier les géodésiques primitives sur les surfaces hyperboliques, problème étudié notamment par Huber, Margulis, Bowen, Sarnak, Zelditch etc...

Les problèmes rencontrés lors de cette collaboration nous amènent à un projet de simulation numérique, qui constitue le seconde partie de ce projet de recherche. L'idée de faire des simulations numériques a été rendu possible par ma participation à la mise en place, sous l'initiative d'Anna Wienhard, du laboratoire de géométrie expérimentale d'Heidelberg (Hegl).

La troisième partie de ce projet de recherche découle directement de mes travaux de thèse sur le vecteur de Lyapunov des marches aléatoires sur les groupes de Lie.

Enfin, dans la dernière partie de ce projet, j'aborde des pistes de recherches futures sur la dynamique en mesure infinie des flots des chambre de Weyl réguliers, mis en perspective par rapport aux prépublications récentes de Burger–Landesberg–Lee–Oh [BLLO21].

3.1 Comptage et équidistribution de tores plats périodiques

Avant de présenter les travaux en cours avec Jialun Li ainsi que notre projet de collaboration, commençons par survoler les théorèmes de comptage et d'équirépartition des géodésiques primitives dans les surfaces hyperboliques compactes ou d'aires finies.

Comptage de géodésiques primitives En 1959, H. Huber [Hub59] obtient un résultat de comptage des géodésiques fermées primitives sur les surfaces hyperboliques compactes. Plus précisément, si on note pour tout $t > 0$ par $N(t)$ le nombre de géodésiques fermées primitives de longueur au plus t, Huber obtient l'équivalent asymptotique suivant lorsque $t \to \infty$

$$N(t) \sim \frac{e^t}{t}. \tag{1}$$

En 1969, G. Margulis [Mar69] étend ce résultat pour les variétés compactes de courbure négative stricte en utilisant des méthodes venant de la théorie ergodique. Il démontre que la croissance exponentielle de $N(t)$ est égale à l'entropie topologique du flot géodésique. Hejhal et Randol [Hej76], [Ran77] obtiennent tous les termes de l'asymptotique, qu'ils expriment grâce au spectre de l'opérateur de Laplace-Beltrami.

En 1980, P. Sarnak [Sar82] étend le résultat d'Huber aux surfaces hyperboliques d'aire finies.

Formules d'équidistributions Indépendemment Margulis dans sa thèse (1970) et R. Bowen [Bow72a] obtiennent un résultat d'équidistribu-tion des orbites périodiques du flot géodésique d'une variété hyperbolique compacte vers une mesure d'entropie maximal. Dans un second papier [Bow72b], Bowen prouve l'unicité de la mesure d'entropie maximale pour les variétés hyperboliques compactes. Par conséquent, la mesure d'équidistribution correspond à la mesure quotient de la mesure de Haar. Plus précisément, soit $\mathcal{M}$ une variété hyperbolique compacte, notons Γ son groupe fondamental. L'action du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathcal{M}$ s'identifie à l'action par multiplication à droite $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \curvearrowleft \{diag(e^{t/2}, e^{-t/2})\}_{t\in\mathbb{R}}$. Notons pour tout $t>0$ par $\mathcal{G}_p(t)$ le sous-ensemble des orbites périodiques du flot géodésique, de période minimale au plus t. Pour toute orbite périodique $\gamma \in \mathcal{G}_p(+\infty)$, notons $\ell(\gamma)$ sa période minimale et considérons $\mathcal{P}_\gamma$ la mesure de probabilité obtenue en poussant en avant la mesure de Lebesgue de $[0,\ell(\gamma)]$ sur l'orbite périodique.

Bowen prouve la convergence suivante appelée *formule d'équidistribution* : pour toute fonction test f lisse à support compact,

$$\frac{\delta t}{e^{\delta t}} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}_p(t)} \int f \mathrm{d}\mathcal{P}_\gamma \xrightarrow[t\to\infty]{} \int f \mathrm{d}m_{BMS}, \tag{2}$$

où m_{BMS} est la mesure de Liouville et $\delta>0$ est l'entropie topologique du flot géodésique.

En 1992, Zelditch [Zel92], étend la formule d'équidistribution aux surfaces hyperboliques d'aire fini.

Ces résultats pionniers de comptage et d'équidistribution sur les surfaces hyperboliques ont été généralisés depuis par entre autres DeGeorges, Parry–Pollicott, Paulin–Parkkonen, N. Anantharaman, Margulis–Mohammadi–Oh, Naud ...

Question 3.1. *Que se passe-t-il si on remplace* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *par un groupe de Lie* G *de rang supérieur ou égal à* 2 *?*

Dans toute la suite, G est un groupe de Lie connexe, réel linéaire, semisimple, sans facteur compact, par exemple $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ où $d\geq 3$. Considérons un tore déployé maximal ou sous-groupe de Cartan A, dans l'exemple $\{diag(a_1,...,a_d) \mid \prod_{1\leq i\leq d} a_i = 1\}$, un sous-groupe compact maximal K, dans l'exemple $\mathrm{SO}(d,\mathbb{R})$ et notons $M := Z_K(A)$ le centralisateur de A dans K. Appelons *tores plats périodiques maximaux* les A-orbites à droite compactes de $\Gamma\backslash G/M$. Notons par $C(A)\subset\Gamma\backslash G/M$ le sous-ensemble des tores plats périodiques maximaux. Pour tout tore plat périodique maximal $F\in C(A)$, considérons le réseau suivant de $\mathfrak{a}$

$$\Lambda(F) := \{Y\in\mathfrak{a} \mid xe^Y = x \ ,\ \forall x\in F\}.$$

Notons $vol_{\mathfrak{a}}(F)$ le volume du réseau $\mathfrak{a}/\Lambda(F)$ pour la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}$.

Plaçons nous d'abord dans le cas où Γ est un réseau cocompact de G. La théorie des groupes arithmétiques développée entre autres par Borel, Tits, Weil, Harish, Chandra, Selberg, Kazhdan, Margulis, Raghunathan permet de construire des exemples et donne des critères de non-cocompacité (Cf. [Mor15]).

D'après les travaux de Selberg [Sel62] ou [Spa83], toutes les orbites périodiques pour les flots des chambre de Weyl régulier vivent sur des tores plats périodiques maximaux.

En 1983, Spatzier dans sa thèse [Spa83] démontre que le nombre de tores plats périodiques maximaux de systole inférieure à $t > 0$ de l'espace symétrique compact $\Gamma\backslash G/K$, croît exponentiellement vite lorsque t tend vers l'infini. Il démontre que la croissance exponentielle du nombre de tore plats est égale à l'entropie topologique du flot géodésique,

Équidistribution et comptage avec vitesse de convergence Avec Jialun Li, nous obtenons dans une pré-publication récente [DL22] une formule d'équidistribution similaire à (2) pour les tores plat périodiques maximaux ainsi qu'une vitesse de convergence exponentielle. De cette formule, nous en déduisons une formule de comptage.

Notons $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathfrak{a}$ donnée par la forme de Killing, par $B(0,t)$ la boule euclidienne centrée en 0 associée et choisissons une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}$ notée $Leb_{\mathfrak{a}}$. Pour tout $t > 0$, posons $\mathfrak{a}^{++}_{[0,t]} := \mathfrak{a}^{++} \cap B(0,t)$ et $D_t = K\exp(B(0,t))K$.

Pour tout tore plat périodique maximal $F \in C(A)$, notons $\mathcal{L}_F$ la mesure quotient de $Leb_{\mathfrak{a}}$ sur la A-orbite compacte i.e. la restriction de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}$ à un domaine fondamental de $\mathfrak{a}/\Lambda(F)$ poussée sur le tore plat. Notons vol la mesure de Haar sur G telle que sa mesure quotient sur l'espace symétrique G/K corresponde à celle induite par la métrique Riemanienne. Enfin, m_Γ désigne la mesure de probabilité obtenue par renormalisation de la mesure quotient sur $\Gamma\backslash G/M$ de vol.

Théorème 3.2 (avec Jialun Li [DL22])**.** *Soit $\Gamma < G$ un réseau irréductible cocompact sans torsion ou bien $G = \mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ et Γ est une sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ agissant librement sur G/M.*

Alors il existe une constante $C_G > 0$ qui ne dépend que de G, un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction test f lipschitzienne et bornée sur $\Gamma\backslash G/M$ et lorsque $t \to +\infty$,

$$\frac{1}{vol(D_t)} \sum_{F\in C(A)} \sharp\{\Lambda(F) \cap \mathfrak{a}^{++}_{[0,t]}\} \int f \mathrm{d}\mathcal{L}_F = C_G \int f \mathrm{d}m_\Gamma + O(e^{-\varepsilon t}|f|_{Lip}).$$

Notons que $vol(D_t) \sim C_0 t^{\frac{\dim A-1}{2}} e^{\delta_0 t}$ où δ_0 est donné par le système de racines de G et C_0 par la formule de Borel–Harish–Chandra de désintégration de la mesure de Haar sur G en décomposition de Cartan. Nous en déduisons la formule de comptage suivant.

Théorème 3.3 (avec Jialun Li [DL22])**.** *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent et pour les mêmes constantes C_G et $\varepsilon > 0$.*
Lorsque $t \to +\infty$,

$$\frac{1}{vol(D_t)} \sum_{F\in C(A)} \sharp\{\Lambda(F) \cap \mathfrak{a}^{++}_{[0,t]}\}\, vol_{\mathfrak{a}}(F) = C_G + O(e^{-\varepsilon t}).$$

Cas cocompact Parmi les méthodes utilisées dans le cas cocompact, nous commençons par désintégrer la mesure de Haar sur G/M dans les coordonnées de Hopf en rang supérieur. Ensuite, nous utilisons les résultats d'équidistribution angulaire effectives de Gorodnik–Nevo [GN12a], adaptons les méthodes de Roblin [Rob03] au rang supérieur pour obtenir le terme de convergence. On déduit de la formule d'équidistribution une formule de comptage similaire à (1) avec vitesse exponentielle de convergence. Notons que chaque tore plat est compté avec multiplicité dès que sa systole est plus petite que t.

Notons $\Pi \subset \mathfrak{a}^*$ l'ensemble des racines simples de l'algèbre de Lie de G. En 2004, Deitmar [Dei04], obtient l'équivalence asymptotique de comptage suivante lorsque tous les t_α où $\alpha \in \Pi$ tendent vers l'infini

$$\sum_{F \in C(A)} \sharp \left\{ \Lambda(F) \cap \prod_{\alpha \in \Pi} \alpha^{-1}([0, t_\alpha]) \right\} vol_{\mathfrak{a}}(F) \ \sim e^{\sum_{\alpha \in \Pi} t_\alpha}.$$

Dans une prépublication très récente, Bonthonneau–Guillarmou–Weich [BGW21] obtiennent dans le cadre des actions Anosov une formule d'équidistribution des tores plats périodiques maximaux vers la mesure physique, qui correspond dans notre cas à la mesure quotient de la mesure de Haar. Ils en déduisent aussi une formule de comptage. Notons que leur théorème est vrai pour les réseaux cocompacts sans torsion de G, même s'ils n'obtiennent pas d'estimées sur la vitesse de convergence.

Cas non cocompact et volume fini Dans ce cas où $\Gamma \backslash G/M$ est non-compact mais toujours de volume fini, par exemple $\Gamma = \mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ il n'est plus vrai que toute orbite périodiques pour un flot des chambre de Weyl régulier vit sur une A-orbite compacte. Néanmoins, on peut se poser les questions suivantes.

Question 3.4. *1) Est-ce que génériquement, les orbites périodiques de flots des chambres de Weyl réguliers vivent sur des tores plats périodiques ?*

2) Étant donné un point d'un tore plat périodique maximal, y a-t-il une fuite de masse importante dans les cusps de $\Gamma \backslash G/M$ de la A-orbite de ce point?

3) Malgré les cas de forte concentration dans les cusps, peut-on quand même en déduire une formule d'équidistribution similaire à l'énoncé 3.2 ? de comptage comme pour l'énoncé 3.3 ?

En 2019, pour $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ et $\Gamma = \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$, Deitmar–Gon–Spilioti [DGS19] étendent la formule de comptage précédemment obtenue par Deitmar.

En 2011, pour le même cas, Einsiedler–Lindenstrauss–Michel–Venkatesh [ELMV11] obtiennent une formule d'équidistribution de tores plats périodiques maximaux. On pourra consulter le séminaire Bourbaki [Bre10] sur ces travaux.

Donnons une idée de la stratégie employée par Jialun Li et moi lorsque Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$, agissant librement sur G/M. Notons qu'un point de $\Gamma \backslash G/K$ correspond alors à un réseau unimodulaire de $\mathbb{R}^d$. Pour la première étape, on utilise les travaux de Prasad–Raghunathan [PR72] ou Borel–Harish–Chandra [BH62] pour obtenir un critère de non compacité des A-orbites. La rareté des A-orbites non compacte est obtenue grâce aux travaux de Gorodnik–Nevo [GN12b]. Dans ce cas très particulier pour G et Γ, chaque point dans $\Gamma \backslash G$ correspond à un réseau unimodulaire. On peut utiliser la systole pour mesurer à quel point le réseau de $\mathbb{R}^d$ est dégénéré, ce qui correspond à la hauteur dans le cusp. La seconde étape revient à étudier le comportement de la systole le long de la A-orbite. Enfin, pour la dernière étape, on utilise les mêmes méthodes de Gorodnik–Nevo et Roblin que dans le cas cocompact, mais sur un domaine de Siegel contenant strictement un domaine fondamental de G pour l'action de Γ.

Plus généralement, pour aller dans le sens des travaux de Sarnak sur la surface modulaire, j'aimerais mieux comprendre les liens entre la théorie des nombres et le problème de comptage sur lequel on travaille.

3.2 Projet de simulation numérique

Puisque des tores plats de $\mathfrak{a}$ apparaissent dans nos formules d'équidistribution 3.2 et de comptage 3.3, on aimerait avec Jialun Li, comprendre leur distribution de forme lorsque leur volume grandit. La forme est paramétrée par un point dans $\mathrm{SL}(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})/\mathrm{SL}(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}})$. Dans le cas où $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, un tore plat périodique F correspondrait à un point dans la courbe modulaire, qu'on pourrait représenter avec une taille inversement proportionnelle à $vol_{\mathfrak{a}}(F)$.

Question 3.5. *Soit* $\Gamma < \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ *un réseau cocompact.*

Que pourra-t-on observer sur $\mathrm{SL}(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})/\mathrm{SL}(\mathfrak{a}_{\mathbb{Z}}) \sim \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(\mathbb{Z})$ *sur la distribution du volume et de la forme des tores plats périodiques dans* $\Gamma\backslash\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ *?*

Si on arrive à comprendre la distribution asymptotique, pourra-t-on en déduire une formule d'équidistribution de Bowen mais cette fois sans compter les multiplicités des tores plats périodiques maximaux ?

Quelle formule d'équidistribution rapportée au volume des tores plats obtiendra-t-on ?

On pourra d'abord prendre un exemple de réseau cocompact dans le livre [Mor15] puis utiliser des méthodes numériques similaires à celles de Harriss–Stange–Trettel dans [HST20] pour représenter ces points dans la surface modulaire.

Dans un second projet de simulation numérique, j'aimerais obtenir des représentations du cône limite pour plusieurs exemples de sous-groupe discret Zariski dense.

3.3 Marches aléatoires

Revenons maintenant sur des perspectives de recherches qui découlent des travaux de ma thèse sur les marches aléatoires. Soit Γ un sous-(semi)groupe Zariski dense de G. Dans le paragraphe 3.2 de ma thèse [Dan19], j'introduis un sous-ensembles noté $\mathcal{MD}_Z(\Gamma)$ de mesures de probabilités de premier moment fini, dont le support engendre un sous-semigroupe Zariski dense et satisfaisant l'hypothèse $\mathcal{D}$ suivante.

Hypothèse 3.6. *Soit* $\mu \in \mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$*. On dit que* μ *satisfait* $\mathcal{D}$ *s'il existe une fonction croissante* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^*_+$ *et un réel* $R_\mu \in \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$ *tels que*

(i) $\lim_{n+\infty} \varphi(n) = +\infty$,

(ii) pour tout ouvert non vide $U \subset B(0,R_\mu)$*, il existe* $\varepsilon(U) > 0$ *tel que*

$$\limsup_{n+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\kappa(X_1 ... X_n) - n\overrightarrow{\lambda}_\mu}{\varphi(n)} \in U\right) \geq \varepsilon(U) > 0.$$

D'après le théorème central limite [BQ16], cet ensemble satisfait

$$\mathcal{M}^2_Z(\Gamma) \subset \mathcal{MD}_Z(\Gamma) \subset \mathcal{M}^1_Z(\Gamma).$$

En m'inspirant de la preuve de Ç. Sert [Ser16], je démontre que pour tout $\mu \in \mathcal{MD}_Z(\Gamma)$, alors

$$\overrightarrow{\lambda}_\mu \in \mathring{\mathcal{C}}(\Gamma).$$

Lorsque $G = \mathbb{R}$ et Γ un sous-groupe additif dense, on trouve dans le livre de Gnedenko–Kolmogorov [GK49] des exemples de lois de probabilité de premier moment fini et de second moment infini satisfaisant l'hypothèse de déviation ci-dessus. Ce sont les lois dites (α,β)-stables, où $\alpha \in]0,2]$ et $\beta \in [-1,1]$, dont font aussi partie les lois de Lorentz. Je m'intéresse au cas où G est un groupe de Lie non commutatif.

Question 3.7. *Soit G un groupe de Lie semisimple réel linéaire de type non-compact et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G.*

Existe-t-il des mesures dans $\mathcal{MD}_Z(\Gamma) \setminus \mathcal{M}^2_Z(\Gamma)$? dans $\mathcal{M}^1_Z(\Gamma) \setminus \mathcal{MD}_Z(\Gamma)$?

Pourra-t-on aussi obtenir d'autres théorèmes limites pour ces mesures qui ne sont pas de second moment fini ?

3.4 Dynamique en mesure infinie

Plaçons nous d'abord dans le cas $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\Gamma < G$ est discret, sans torsion, non élémentaire et de covolume infini. Considérons la dynamique en mesure infinie du flot géodésique sur $\Gamma\backslash G/M$. La théorie de Patterson–Sullivan permet de construire une mesure conforme ν sur l'ensemble limite dans $\partial\mathbb{H}$ de Γ, puis d'en déduire une mesure de Radon, la mesure de Bowen–Margulis–Sullivan (BMS), sur l'ensemble non-errant du flot géodésique. Les points coniques de l'ensemble limite sont ceux pour lequel toute orbite du flot géodésique revient infiniment souvent dans un compact.

La *dichotomie de Hopf–Tsuji–Sullivan* qui est dûe aux travaux de Sullivan, Burger–Mozes ou encore la thèse de Roblin, relie les propriétés dynamiques du flot géodésique (ergodicité, conservativité, dissipativité ...) pour la mesure BMS à la ν-généricité des points coniques dans l'ensemble limite de Γ.

Dans une prépublication très récente, Burger–Landesberg–Lee–Oh [BLLO21] obtiennent une dichotomie de Hopf–Tsuji–Sullivan en rang supérieur pour les flots des chambre de Weyl. Leurs travaux portent dans une première partie sur le cas où $\Gamma < G$ est discret, Zariski dense, pour les mesures de BMS en rang supérieur construites dans les travaux de Quint [Qui02], Thirion [Thi07], Sambarino [Sam14] et pour les flots des chambres de Weyl réguliers. Leur Théorème 1.4 donne des critères d'ergodicité et conservativité ou bien non-ergodicité et dissipativité des flots réguliers des chambres de Weyl par rapport au choix de la mesure BMS.

La seconde partie de leurs travaux, le Théorème 1.6, porte sur le cas où Γ est Borel Anosov. Dans ce cas particulier, pour tout flot des chambres de Weyl paramétré par une direction u de l'intérieur du cône limite $\mathcal{C}(\Gamma)$, on associe une unique mesure BMS qui, si le rang de G est inférieur à 3 rend le flot ϕ^t_u ergodique et conservatif. Dès que le rang de G est strictement supérieur à 3, pour n'importe quel choix de mesure BMS, le système dynamique mesuré est non-ergodique et totalement dissipatif.

Question 3.8. *Existe-il des exemples non Borel Anosov et pour lequel le rang de G est plus grand que 3 pour lequel on ait ergodicité et conservativité ?*

J'aimerais dans un futur proche m'intéresser à la dynamique en mesure infinie des flots des chambre de Weyl réguliers mais pour des mesures de Radon A-invariantes sur G/M qui se désintègrent en mesures stationnaires de marche aléatoires sur le bord de Furstenberg.

Considérons $\mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$ l'espace des mesures de probabilités sur G de premier moment fni et telles que leur support, dans Γ engendre un sous-semigroupe Zariski dense de G. D'après le théorème de Furstenberg–Kifer [FK83], pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$, il existe une unique mesure μ-stationnaire ν_μ sur le bord de Furstenberg.

Question 3.9. *Pour tout $\mu, \mu' \in \mathcal{M}^1_Z(\Gamma)$, peut-on construire une mesure de Radon $m^{\mu,\mu'}$ sur G/M absolument continue par rapport à $\nu_\mu \otimes \nu_{\mu'} \otimes Leb_{\mathfrak{a}}$ qui soit Γ-invariante ? Pour une telle mesure, quelles sont les propriétés (ergodicité, dissipativité, conservativité ...) du système dynamique mesuré $(\phi^t_\theta, \Omega, m^{\mu,\mu'})$? Si de plus $\overrightarrow{\lambda}_\mu = \iota\overrightarrow{\lambda}_{\mu'}$ est-ce qu'on peut obtenir des estimées de mélange pour $(\phi^t_{\lambda_\mu}, \Omega, m^{\mu,\mu'})$?*

4 Activités d'enseignement et responsabilités collectives

Pendant mes années de thèses à Rennes, j'ai assuré 64 heures de monitorat par années. J'ai été chargée de TD pour les étudiants du parcours L1 Biologie pendant mes trois années de thèse, j'ai aussi assuré des vacations à l'IUT de Rennes en janvier 2017. Après avoir participé en octobre 2019 à l'Arbeitsgemeinschaft organisé par A. Brown–D. Fischer–S. Hurtado sur la conjecture de Zimmer, j'ai donné d'avril à juillet 2020 (pendant le premier confinement) 7 cours doctoraux en ligne sur les exposants de Lyapunov, l'entropie topologique et l'entropie de Kolmogorov–Sinaï.

De novembre 2020 jusqu'en juillet 2021, j'ai organisé le "Junior geometry seminar", où les étudiants de licence et master des équipes de géométrie différentielle et symplectique présentaient leurs mémoires.

References

[Ben97] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. *Geom. Funct. Anal.*, 7(1):1–47, 1997.

[Ben00] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. II. In *Analysis on homogeneous spaces and representation theory of Lie groups, Okayama–Kyoto (1997)*, volume 26 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 33–48. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.

[Ben05] Y. Benoist. Convexes divisibles III. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4)*, 38(5):793–832, 2005.

[BGW21] Y. G. Bonthonneau, C. Guillarmou, and T. Weich. SRB measures for Anosov actions. *arXiv:2103.12127 [math]*, March 2021. arXiv: 2103.12127.

[BH62] A. Borel and Harish-Chandra. Arithmetic Subgroups of Algebraic Groups. *Annals of Mathematics*, 75(3):485–535, 1962.

[BLLO21] Marc Burger, Or Landesberg, Minju Lee, and Hee Oh. The hopf-tsuji-sullivan dichotomy for anosov groups in low and high rank. *arXiv preprint arXiv:2105.13930*, 2021.

[Bow72a] R. Bowen. The Equidistribution of Closed Geodesics. *American Journal of Mathematics*, 94(2):413–423, 1972. Publisher: Johns Hopkins University Press.

[Bow72b] R. Bowen. Periodic orbits for hyperbolic flows. *American Journal of Mathematics*, 94:1–30, 1972.

[BPS16] Jairo Bochi, Rafael Potrie, and Andrés Sambarino. Anosov representations and dominated splittings. *arXiv preprint arXiv:1605.01742*, 2016.

[BQ16] Y. Benoist and J-F. Quint. Central limit theorem for linear groups. *Ann. Probab.*, 44(2):1308–1340, 2016.

[Bre10] E. Breuillard. Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes (d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh). Number 332, pages Exp. No. 1008, ix, 305–339. 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.

[CG02] J-P. Conze and Y. Guivarc'h. Densité d'orbites d'actions de groupes linéaires et propriétés d'équidistribution de marches aléatoires. In *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, pages 39–76. Springer, Berlin, 2002.

[CS21] Michael Chow and Pratyush Sarkar. Local mixing of one-parameter diagonal flows on anosov homogeneous spaces, 2021.

[Dal00] F. Dal'bo. Topologie du feuilletage fortement stable. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(3):981–993, 2000.

[Dan19] N.-T. Dang. *Dynamique d'action de groupes dans des espaces homogènes de rang supérieur et de volume infini.* Theses tel-02301728, Université Rennes 1, September 2019.

[Dan21] N.-T. Dang. Topological mixing of positive diagonal flows. *Accepted for publication in Israel Journal of Math.*, accepted in 2021.

[Dei04] A. Deitmar. A prime geodesic theorem for higher rank spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 14(6):1238–1266, 2004.

[DG20] N.-T. Dang and O. Glorieux. Topological mixing of weyl chamber flows. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, page 1–27, 2020.

[DGS19] A. Deitmar, Y. Gon, and P. Spilioti. A prime geodesic theorem for SL3(Z). *Forum Mathematicum*, 31(5):1179–1201, September 2019.

[DL22] Nguyen-Thi Dang and Jialun Li. Equidistribution and counting of periodic flat tori. *arXiv preprint arXiv:2202.08323*, 2022.

[ELMV11] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, P. Michel, and A. Venkatesh. Distribution of periodic torus orbits and Duke's theorem for cubic fields. *Annals of Mathematics. Second Series*, 173(2):815–885, 2011.

[FK60] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31:457–469, 1960.

[FK83] H. Furstenberg and Y. Kifer. Random matrix products and measures on projective spaces. *Israel J. Math.*, 46(1-2):12–32, 1983.

[GK49] BV Gnedenko and AN Kolmogorov. Limit distributions for sums of independent random variables. In *Am. Math. Soc*, volume 62, pages 50–52, 1949.

[GN12a] A. Gorodnik and A. Nevo. Counting lattice points. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2012(663):127–176, February 2012.

[GN12b] A. Gorodnik and A. Nevo. Lifting, restricting and sifting integral points on affine homogeneous varieties. *Compositio Mathematica*, 148(6):1695–1716, November 2012.

[GR07] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Actions of large semigroups and random walks on isometric extensions of boundaries. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(2):209–249, 2007.

[GW12] Olivier Guichard and Anna Wienhard. Anosov representations: domains of discontinuity and applications. *Inventiones mathematicae*, 190(2):357–438, 2012.

[Hej76] D. A. Hejhal. *The Selberg trace formula for* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Vol. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 548. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[HM79] R. E. Howe and C. C. Moore. Asymptotic properties of unitary representations. *J. Functional Analysis*, 32(1):72–96, 1979.

[HST20] Edmund Harriss, Katherine E Stange, and Steve Trettel. Algebraic number starscapes. *arXiv preprint arXiv:2008.07655*, 2020.

[Hub59] Heinz Huber. Zur analytischen theorie hyperbolischer raumformen und bewegungsgruppen. *Mathematische Annalen*, 138(1):1–26, 1959.

[Kim06] I. Kim. Length spectrum in rank one symmetric space is not arithmetic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(12):3691–3696, 2006.

[KLLR19] Alex Kontorovich, Darren D Long, Alexander Lubotzky, and Alan W Reid. What is... a thin group? *Notices of the American Mathematical Society*, 66(06), 2019.

[Lab06] F. Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Invent. Math.*, 165(1):51–114, 2006.

[LO20] M. Lee and H. Oh. Ergodic decompositions of Burger-Roblin measures on Anosov homogeneous spaces, 2020.

[Mar69] G. A. Margulis. Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. *Akademija Nauk SSSR. Funkcional\cprime nyi Analiz i ego Priloženija*, 3(4):89–90, 1969.

[MO15] A. Mohammadi and H. Oh. Matrix coefficients, counting and primes for orbits of geometrically finite groups. *Journal of the European Mathematical Society*, 017(4):837–897, 2015.

[Mor15] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*, volume 1319. Deductive Press deductivepress. ca/IntroArithGrps-FINAL. pdf, 2015.

[MS19] F. Maucourant and B. Schapira. On topological and measurable dynamics of unipotent frame flows for hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 168(4):697–747, 2019.

[PR72] Gopal Prasad and M. S. Raghunathan. Cartan Subgroups and Lattices in Semi-Simple Groups. *The Annals of Mathematics*, 96(2):296, September 1972.

[Qui02] Jean-François Quint. Divergence exponentielle des sous-groupes discrets en rang supérieur. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 77(3):563–608, 2002.

[Ran77] B. Randol. On the asymptotic distribution of closed geodesics on compact Riemann surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 233:241–247, 1977.

[Rob03] T. Roblin. Ergodicité et équidistribution en courbure négative. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (95):vi+96, 2003.

[Sam14] A. Sambarino. Hyperconvex representations and exponential growth. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 34(3):986–1010, 2014.

[Sam15] A. Sambarino. The orbital counting problem for hyperconvex representations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(4):1755–1797, 2015.

[Sar82] Peter Sarnak. Class numbers of indefinite binary quadratic forms. *Journal of Number Theory*, 15(2):229–247, October 1982.

[Sel62] Atle Selberg. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. *Matematika*, 6(3):3–16, 1962.

[Ser16] Ç. Sert. *Joint Spectrum and Large Deviation Principles for Random Matrix Products.* PhD thesis, Paris-Saclay, Université, 2016.

[Spa83] Ralf Jürgen Spatzier. *Dynamical Properties of Algebraic Systems: A Study in Closed Geodesics*. PhD thesis, University of Warwick, 1983.

[SW20] P. Sarkar and D. Winter. Exponential mixing of frame flows for convex cocompact hyperbolic manifolds, 2020.

[Thi07] X. Thirion. *Sous-groupes discrets de* $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ *et équidistribution dans les espaces symétriques*. PhD thesis, Tours, 2007.

[Thi09] X. Thirion. Propriétés de mélange du flot des chambres de Weyl des groupes de ping-pong. *Bull. Soc. Math. France*, 137(3):387–421, 2009.

[Tso19] Konstantinos Tsouvalas. On borel anosov representations in even dimensions. *arXiv preprint arXiv:1909.13034*, 2019.

[Win15] D. Winter. Mixing of frame flow for rank one locally symmetric spaces and measure classification. *Israel J. Math.*, 210(1):467–507, 2015.

[Win16] D. Winter. Exponential mixing of frame flow for convex cocompact hyperbolic manifolds, 2016.

[Zel92] Steven Zelditch. Selberg trace formulae and equidistribution theorems for closed geodesics and Laplace eigenfunctions: finite area surfaces. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 96(465):vi+102, 1992.