Sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung von Zahlkörpern mit Ganzheitsringen $\mathcal{O}_L$ und $\mathcal{O}_K$ und Galoisgruppe $G = Gal(L/K)$.

1. Aufgabe: Sei L'/L endliche Galoiserweiterung mit Galois-Gruppe $G' = Gal(L'/K)$. Fixiere Primideale $\mathfrak{P}' \subseteq \mathcal{O}_{L'}$ über $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_L$ über $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie gibt es eine kanonischen Epimorphismus $\phi : G' \to G$. Zeigen Sie:

(a) Dies definiert Epimorphismen der Zerlegungsgruppen $\phi : G'_{\mathfrak{P}'} \to G_{\mathfrak{P}}$ und der Trägheitsgruppen $\phi : I'_{\mathfrak{P}'} \to I_{\mathfrak{P}}$.

(b) Für eine endlich-dimensionale Darstellung ρ von G sei $\rho' = \rho \circ \phi$ die zugehörige Darstellung von G', dann gilt $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(L/K, \rho, s) = \mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(L'/K, \rho', s)$.

2. Aufgabe: Sei $d \geq 3$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

(a) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine nichtabelsche Gruppe D_{2d} der Ordnung $2d$ mit einer zyklische Untergruppe vom Index zwei.

(b) Die Gruppe D_{2d} ist monomiell, das bedeutet: Jede irreduzible Darstellung ist voll-induziert von einer eindimensionalen Darstellung einer Untergruppe.

(c) Ist die Galoisgruppe G monomiell, dann erfüllt L/K die Artin-Vermutung.

3. Aufgabe: Machen Sie sich vertraut mit der Klassifikation der endlichen Untergruppen von $PGL(2, \mathbb{C})$ nach F. Klein.