Übungen zu L-Funktionen Wintersemester 2019

Dr. Mirko Rösner Blatt 6 (Abgabe freiwillig)

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$, Adele $\mathbb{A}_K$ und Idele $\mathbb{I}_K$.

1. Aufgabe: Sei v eine beliebige Bewertung von K. Zeigen Sie:

(a) Für alle $s \in \mathbb{C}$ und alle Quasicharaktere χ von $K_v^\times$ ist das Funktional $f_v \mapsto \lim_{s\to 0} \zeta(f_v, \chi_v, s)/L(\chi_v, s)$ wohldefiniert und nichttrivial.

(b) Folgern Sie: Der Faktor $\epsilon(\chi_v, s) = \frac{L(\chi_v,s)}{L(\chi_v^{-1},1-s)} \frac{\zeta(\widehat{f_v},\chi_v^{-1},1-s)}{\zeta(f_v,\chi_v,s)}$ ist unabhängig von f_v, holomorph in s und nullstellenfrei.

2. Aufgabe: Zeigen Sie für jede Testfunktion $f \in z$, dass das Integral

$$\int_1^\infty \left(\int_{\mathbb{I}^1} f(tb)\chi(tb), s)\mathrm{d}^\times b \right) t^s \mathrm{d}^\times t$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ normal konvergiert und eine analytische Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ darstellt. Hinweis: Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ folgt das im Wesentlichen aus der Definition von z. Für $\mathrm{Re}(s) < \sigma$ gilt $|t^s| < t^\sigma$ für alle reellen σ und $1 \leq t < \infty$.

3. Aufgabe: Besitzt $f \in z$ eine Produktzerlegung $f = \prod f_v$, dann hat die Fouriertransformierte die Produktzerlegung $\widehat{f} = \prod_v \widehat{f_v}$.

4. Aufgabe: Die exakte Sequenz $1 \to \mathbb{I}^1 \to \mathbb{I} \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_{>0} \to 1$ spaltet.

5. Aufgabe: Sei χ ein Hecke-Charakter von K und χ_G der zugehörige Größencharakter. Sei $S \supseteq S_\infty$ eine endliche Menge von Bewertungen, außerhalb derer χ_v unverzweigt ist. Überzeugen Sie sich, dass für geeignete Wahl von f_v gilt:

$$\prod_{v \notin S} \mathcal{N}(\mathfrak{d}_v)^{1/2} \zeta_v(f_v, \chi_v, s) = \zeta(\chi_G, s) \ .$$

Hierbei ist die Hecke-Zeta-Funktion $\zeta(\chi_G, s)$ definiert als die meromorphe Fortsetzung der Reihe $\sum_{\mathfrak{a}} \chi_G(\mathfrak{a}) \mathcal{N}(\mathfrak{a})^{-s}$ über ganze Ideale $\mathfrak{a}$ teilerfremd zu $\mathfrak{p}_v$ für alle $v \in S$.