Übungen zu L-Funktionen Wintersemester 2019

Dr. Mirko Rösner Blatt 5 (Abgabe freiwillig)

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$. Sei $\mathbb{A}_K$ der Adele-Ring zu K und $\mathbb{I}_K$ die Idele-Gruppe.

1. Aufgabe: Die Idele-Norm $\|x\| = \prod_v |x_v|_v$ ist trivial auf den Hauptidelen, also dem Bild der diagonalen Einbettung $K^\times \hookrightarrow \mathbb{I}_K$. Hinweis: Betrachten Sie zunächst $K = \mathbb{Q}$.

2. Aufgabe: Der Quotientenraum $\mathbb{A}_K/K$ ist kompakt, aber $\mathbb{I}_K/K^\times$ ist nicht kompakt. Hinweis: Verwenden Sie starke Approximation.

3. Aufgabe: Die Abbildung $\mathbb{I}_K \to \mathbb{A}_K, x \mapsto x$ ist nicht stetig.

4. Aufgabe: Zeigen Sie, dass der projektive Limes $\varprojlim_{\mathfrak{m}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ isomorph ist zum Ganzheitsring $\widehat{\mathcal{O}} = \prod_{v \nmid \infty} \mathcal{O}_v$. Hier durchläuft $\mathfrak{m}$ alle ganzen Ideale in $\mathcal{O}$.

5. Aufgabe: Charakterisieren Sie die Hecke-Charaktere von endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass diese unter der Abbildung $\chi \mapsto \chi \circ c$ genau den verallgemeinerten Dirichlet-Charakteren entsprechen.

6. Aufgabe: Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\mathbb{A}_L \cong \mathbb{A}_K \otimes_K L$.