

Sei K eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q} mit Ganzheitsring \mathcal{O} und fixierter Einbettung in den Minkowski-Raum \mathbf{R}_X für $X = \text{Hom}(K, \mathbb{C})$ und Idealklassengruppe $\text{Cl}_K = J_K/P_K$.

1. Aufgabe: Sei λ ein stetiger unitärer Charakter des Minkowskiraums \mathbf{R}_X vom Typ (p, q) und sei $0 \neq \mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}$ ein ganzes Ideal.

- (a) Für welche (p, q) liegt $\mathcal{O}^\times = \{\epsilon \in \mathcal{O}^\times \mid \epsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$ im Kern von λ ?
- (b) Für welche (p, q) hat λ endliches Bild?

2. Aufgabe: Sei $G_{\mathfrak{m}}$ die Gruppe der Größencharaktere modulo $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}$ und sei $J_K^\times/\overline{P}_K^\times$ die kleine Strahlklassengruppe mit $\overline{P}^\times = \{(a) \in P \mid a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$. Konstruieren Sie eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \widehat{J_K^\times/\overline{P}_K^\times} \rightarrow G_{\mathfrak{m}} \rightarrow \widehat{\mathbf{R}_X^\times/\mathcal{O}^\times} \rightarrow 1 .$$

für die entsprechenden Gruppen von stetigen Charakteren.

3. Aufgabe: Sei χ ein verallgemeinerter Dirichlet-Charakter modulo \mathfrak{m} .

- (a) Wenn χ die Einschränkung eines Größencharakters $\chi' \in G_{\mathfrak{m}'}$ für einen Teiler $\mathfrak{m}' \mid \mathfrak{m}$ ist, dann ist χ' auch ein verallgemeinerter Dirichlet-Charakter.
- (b) Wieviele verallgemeinerte Dirichlet-Charaktere modulo \mathfrak{m} gibt es? Wieviele davon sind primitiv?