Übungen zu L-Funktionen Wintersemester 2019

Dr. Mirko Rösner Blatt 3 (Abgabe freiwillig)

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}$ und fixierter Einbettung in den Minkowski-Raum $\mathbf{R}_X$ für $X = \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$ durch $j : K \to \mathbf{R}_X$, $x \mapsto (\tau(x))_\tau$.

1. Aufgabe: Sei $\mathfrak{a} \neq 0$ ein gebrochenes Ideal in K. Zeigen Sie:

(a) Das duale Gitter zu $\Gamma = j(\mathfrak{a})$ ist $\Gamma' = j(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1})^*$ mit der Differente $\mathfrak{d}$ zu $K/\mathbb{Q}$.

(b) Das Covolumen des Gitters ist $\mathrm{vol}(\mathbf{R}_X/\Gamma) = \sqrt{|d_K|}\mathcal{N}(\mathfrak{a})$.

(c) Für die Diskriminante $d_\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}$ gilt $d_\mathfrak{a}^{-1} = d_{(\mathfrak{a}\mathfrak{d})^{-1}}$.

2. Aufgabe: Berechnen Sie explizit die Eulerfaktoren der Dedekind'schen ζ-Funktion zum Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ der Gauß'schen Zahlen.

3. Aufgabe: Für $x \in \mathcal{O}$ gilt $|\tau(x)| = 1$ für alle Einbettungen $\tau : K \to \mathbb{C}$ genau dann wenn x eine Einheitswurzel ist.

4. Aufgabe: Sei $K = \mathbb{Q}(\mu_m)$ der Körper der m-ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}|m} (1 - \mathcal{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \prod_\chi L(\chi, s)$$

als Produkt über Primideale $\mathfrak{p}$, welche m teilen, und Dirichlet-Charactere χ modulo m.

5. Aufgabe: Sei $\chi : \mathrm{Cl}_K \to \mathbb{C}^\times$ ein Charakter der Idealklassengruppe. Zeigen Sie:

$$\zeta_K(\chi, s) = \sum_\mathfrak{a} \chi(\mathfrak{a})\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{-s}$$

über die ganzen Ideale $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ lokal gleichmäßig, besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$ und erfüllt die Funktionalgleichung

$$Z(\chi, s) = \chi(\mathfrak{d})Z(\overline{\chi}, 1 - s) \quad , \quad Z(\chi, s) = Z_\infty(s)\zeta_K(\chi, s)$$

mit $Z_\infty(s) = |d_K|^{s/2}\pi^{-ns/2}\Gamma_K(s/2)$ und dem Differentenideal $\mathfrak{d}$ zu $K/$.