Übungen zu L-Funktionen Wintersemester 2019

Dr. Mirko Rösner Blatt 2 (Abgabe freiwillig)

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$.

1. Aufgabe: Mit der bekannten Γ-Funktion definiert man $L_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ und $L_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$. Zeigen Sie:

(a) $L_{\mathbb{C}}(s)L_{\mathbb{C}}(1-s) = \frac{2}{\cos(\pi s)}$,

(b) $L_{\mathbb{R}}(s)L_{\mathbb{R}}(s+1) = L_{\mathbb{C}}(s)$.

(c) $L_{\mathbb{R}}(s)/L_{\mathbb{R}}(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)$.

2. Aufgabe: Sei $\mathbf{R}_X$ der Minkowski-Raum zu $X = \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$ mit der fixierten Einbettung $j : K \hookrightarrow \mathbf{R}_X$ via $j(a) = (\tau(a))_{\tau \in K}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $N_{K/\mathbb{Q}} = N \circ j$ und $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}} = \mathrm{Tr} \circ j$.

(b) $|j(\mathcal{O}_K^\times)|$ liegt im Kern der Norm $\mathbf{R}_X \to \mathbb{R}$.

(c) Die Abbildung $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} K \to \mathbf{R}_X$, $x \otimes a \mapsto x \cdot j(a)$ ist ein Isomorphismus.

(d) $\Gamma_X(s) = 2^{1-2s}\Gamma(s)$, falls K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ist.

(e) Jedes gebrochene $\mathcal{O}_K$-Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ spannt ein vollständiges Gitter $j(\mathfrak{a})$ in $\mathbf{R}_X$ auf.

3. Aufgabe: Die Reihe $\zeta_K(s) = \sum_{0 \neq \mathfrak{a}} \mathcal{N}(\mathfrak{a})^{-s}$ über die ganzen Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ konvergiert gleichmäßig und absolut auf der rechten Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1 + \delta$. Hinweis: Die Anzahl ganzer Primideale in $\mathcal{O}_K$ mit gegebener Norm ist beschränkt durch eine nur von K abhängige Konstante.