Übungen zu L-Funktionen Wintersemester 2019

Dr. Mirko Rösner Blatt 1 (Abgabe freiwillig)

Sei $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ein Dirichlet-Charakter modulo $m \geq 1$.

1. Aufgabe: (a) Die Dirichlet-Charaktere modulo m bilden eine Gruppe $(\widehat{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})^\times$.

(b) $n \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ definiert einen Charakter $[n] : (\widehat{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})^\times \to \mathbb{C}^\times$ via $\chi \mapsto \chi(n)$.

(c) (Pontrjagin-Dualität) Dies liefert einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und den Charakteren von $(\widehat{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}})^\times$ durch $n \mapsto [n]$.

2. Aufgabe: Für die Gaußsumme $\tau(\chi) = \sum_{n=1}^m \chi(m) \exp(2\pi i n/m)$ gilt

(a) $\overline{\tau(\chi)} = \tau(\overline{\chi})\chi(-1)$,

(b) $|\tau(\chi)| = \sqrt{m}$ wenn χ primitiv ist.

3. Aufgabe: Zeigen Sie: Die Dirichlet-L-Funktion $L(\chi, s)$ hat keine Null- oder Polstellen für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Hinweis: Verwenden Sie das Eulerprodukt.

4. Aufgabe: Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo m mit conductor $f = 1$. Berechnen Sie den Quotienten $L(\chi, s)/\zeta(s)$. Bestimmen Sie die Pole von $L(\chi, s)$.

5. Aufgabe: Die Menge der nichttrivialen Nullstellen von $L(\chi, s)$ ist achsensymmetrisch zur Symmetrieachse $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Hinweis: Verwenden Sie die Funktionalgleichung und $\overline{L(\chi, s)} = L(\overline{\chi}, \overline{s})$.

6. Aufgabe: Finden und lesen Sie den Artikel "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe" von Bernhard Riemann.