Konstruktion von L-Funktionen **Wintersemester 2019/20**

Dr. Mirko Rösner mittwochs 16:15-18:00 Uhr, Seminarraum 3 (Mathematikon)

Die Riemann'sche Zeta-Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und lässt sich auf eindeutige Weise zu einer meromorphen Funktion $\zeta(s)$ auf $\mathbb{C}$ fortsetzen mit der Funktionalgleichung

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\zeta(1-s) \ .$$

Man zeigt dann leicht, dass $\zeta(s)$ Nullstellen hat bei den negativen ganzen Zahlen $s = -2, -4, -6, \ldots$ Nach der berühmten Riemannschen Vermutung liegen alle anderen Nullstellen bei $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

In verschiedenen Bereichen der Mathematik hat es sich als nützlich erwiesen, Objekten X meromorphe Funktionen $s \mapsto L(s, X)$ zuzuordnen, die ähnliche Eigenschaften wie die Riemann'sche Zetafunktion haben. Die Objekte sind dabei zum Beispiel Modulformen, elliptische Kurven, automorphe Darstellungen, Hecke-Charaktere oder Motive. Dies ermöglicht es, Korrespondenzen (z.B. Langlands-Korrespondenz) explizit und elegant zu formulieren, indem man L-Funktionen als Invariante ("Fingerabdruck") benutzt.

Im Allgemeinen ist aber oft nicht klar, wie man sich L-Funktionen verschafft. Zur Konstruktion benötigt man manchmal Zusatzstrukturen wie z.B. Whittakermodelle, muss dann aber zeigen, dass die Wahl eines Modells nicht die L-Funktion beeinflusst.

Wir diskutieren in der Vorlesung zunächst die Konstruktion der L-Funktionen zu Darstellungen π der linearen Gruppen $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_K)$ über Adéle-Ringen zu Zahlkörpern K. Diese erlauben eine Zerlegung als Euler-Produkt $L(s,\pi) = \prod_v L(s, \pi_v)$, dessen Faktoren jeweils Darstellungen der lokalen Gruppen $\mathrm{GL}(n, K_v)$ parametrisieren. Insbesondere interessieren wir uns für $n = 1$ (Tate's thesis) und $n = 2$ (Jacquet-Langlands). Für $n = 2$ sind diese L-Funktionen eng verbunden mit den Dirichletschen L-Reihen zu elliptischen Modulformen, die man durch die Hecke Korrespondenz gewinnt. Wir werden außerdem die vollständige Formulierung der lokalen Langlands-Korrespondenz kennenlernen und evtl. einige Beweisideen für die Fälle $n = 1, 2$ diskutieren. Weitere Themen können nach Interesse der Teilnehmer vereinbart werden.

Übung: freitags 16:15 bis 18:00 Uhr, Seminarraum 6 (Mathematikon).

Die Übung dient daher insbesondere zur Auffrischung benötigter Grundlagen und zur Wiederholung und Vertiefung des Stoffes. Auf besonderen Wunsch erstelle ich Übungsaufgaben, die wir dann in der Übung besprechen.

- ECTS-Punkte: 6
- Umfang: Vorlesung (2 SWS) mit Übung (2 SWS)
- Vorkenntnisse: Funktionentheorie 1.
  Grundkenntnisse über p-adische Zahlkörper sind nützlich.
- Website: `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner`
- Kontakt: `mroesner@mathi.uni-heidelberg.de`, Zimmer 3.332 (Mathematikon)

"Some decades ago I made - somewhat in jest - the suggestion that one should get accepted a non-proliferation treaty of zeta functions. There was becoming such an overwhelming variety of these objects."

Atle Selberg