Dieser Zettel wird mit Maximalpunktzahl 16 gewertet. Sie können jedoch mehr Punkte erreichen. Überzählige Punkte zählen dann als Bonuspunkte.
Sei D ein Gebiet und $z_0 \in D$.

50. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol in z_0 der Ordnung $\leq N$. Zeigen Sie

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{N-1} (z - z_0)^N f(z) \right) .$$

(b) Seien $p, q \in \mathcal{O}(D)$ holomorphe Funktion auf D und sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ definiert für alle $z \in D$ mit $q(z) \neq 0$. Wenn $z_0 \in D$ eine einfache Nullstelle von q ist dann gilt $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.

51. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Berechnen Sie für zwei der folgenden drei Funktionen das Residuum von

(a) $f(z) = z^{-2}(\exp(z+1) - \exp(2z+1))$ in $z_0 = 0$,

(b) $g(z) = (\cos(z/2))^{-2}$ in $z_0 = \pi$,

(c) $h(z) = \frac{\exp(z^2)}{\sin^2(z)}$ in $z_0 = 0$,

Hinweis: Wenn Sie Aufgabe 50 verwenden, sollten Sie zeigen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

52. Aufgabe: (2+1+1=4 Punkte) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

(a) $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

(b) die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ ist holomorph.

(c) Ist $D = \mathbb{C}$, dann ist f ein Polynom vom Grad $\deg(f) = 1$.

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis des Satzes von der Gebietstreue.

53. Aufgabe: (2+2+2+2=8 Punkte) Wir zeigen in mehreren Schritten die Gleichung

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \quad \overset{!}{=} \quad z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) =: G(z) \ . \tag{$*$}$$

(a) Zeigen Sie, dass $G(z)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert und damit eine holomorphe Funktion darstellt.

(b) Vergleichen Sie die Ordnung der Nullstellen auf beiden Seiten und folgern Sie, dass es eine ganze holomorphe Funktion $h(z)$ gibt mit

$$H(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi} = e^{h(z)} G(z) \ .$$

(c) Zeigen Sie $h' = 0$, indem Sie $\frac{H'}{H}$ für beide Seiten von H berechnen. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 49.

(d) Folgern Sie die obige Produktformel, indem Sie die Konstante $c = e^{h(z)}$ explizit berechnen. Hinweis: Bestimmen Sie zum Beispiel den linearen Term der Taylorentwicklung von $H(z)$ in $z = 0$ auf beiden Seiten.