Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 11
Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 10. Juli

Bearbeiten Sie bitte nur vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.
Für jedes Gebiet D bezeichne $\mathcal{O}(D)$ die Menge der holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$.

46. Aufgabe: Wir sagen "das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_\nu)$ konvergiert absolut" für eine Folge $(a_\nu)_\nu$ komplexer Zahlen, falls die Reihe $\sum_\nu a_\nu$ absolut konvergiert. Zeigen Sie:

(a) Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht absolut, obwohl die Folge der Partialprodukte $(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n})$ für $N \to \infty$ konvergiert.

(b) Das Produkt $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$ konvergiert absolut. Berechnen Sie den Grenzwert.

(c) Das Produkt $\phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^n)$ konvergiert absolut für $z \in \mathbb{C}$ genau dann wenn $|z| < 1$. Es definiert eine holomorphe Funktion ϕ in $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

47. Aufgabe: Seien $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > -\epsilon\}$ für ein $\epsilon > 0$ und $f : D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Polstellen $s \in S$, die alle in der oberen Halbebene liegen, d.h. $\mathrm{Im}(s) > 0$. Außerdem gibt es reelle $\delta > 0$, $c > 0$ und $C > 0$ sodass die Abschätzung $|f(z)| < C|z|^{-1-\delta}$ für alle $z \in D$ mit $|z| > c$ gilt.

(a) Zeigen Sie:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{s\in S} \mathrm{Res}_s(f) \ .$$

(b) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis zu a): Verwenden Sie den Weg
$$\gamma(t) = \begin{cases} -R + 2tR & 0 \le t < 1 \ , \\ R\exp(2\pi i(t-1)) & 1 \le t \le 2 \ , \end{cases}$$

und verwenden Sie den Residuensatz. Zeigen Sie, dass das Integral über den Kreisbogen (also $1 \le t \le 2$) für $R \to \infty$ gegen Null geht.

48. Aufgabe: Wir zeigen in mehreren Schritten die Gleichung
$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \overset{!}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \ . \qquad (*)$$

(a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ konvergiert in $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ kompakt, stellt dort also eine holomorphe Funktion dar.

(b) Die Differenz $g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ hat hebbare Singularitäten in $z \in \mathbb{Z}$ und erfüllt $g(z) = g(z+1)$.

(c) $|g(z)|$ konvergiert gleichmäßig gegen Null für $\mathrm{Im}(z) \to \infty$. Mit anderen Worten: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $C > 0$ mit $|g(z)| < \epsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\mathrm{Im}(z)| > C$.

(d) Zeigen Sie $g = 0$. Hinweis: Satz von Liouville.

49. Aufgabe: Wir zeigen in mehreren Schritten die Gleichung

$$\pi \cot(\pi z) \quad \overset{!}{=} \quad \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - n^2} \right) \ . \tag{$**$}$$

(a) Zeigen Sie, dass die rechte Seite kompakt konvergiert in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) Sei $h(z)$ die Differenz beider Seiten in $(**)$. Zeigen Sie $h' = 0$ wegen $(*)$.

(c) Zeigen Sie $h = 0$, indem Sie $h(z)$ für ein festes z explizit berechnen.

50. Aufgabe: Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Hinweis: Berechnen Sie für beide Seiten von $(*)$ die Laurentkoeffizienten a_{-2}, a_{-1}, a_0 für die Laurententwicklung in $D_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Verwenden Sie zum Beispiel die Cauchy-Faltung.