Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 10

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 3. Juli

Bearbeiten Sie bitte nur vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.
Für jedes Gebiet D bezeichne $\mathcal{O}(D)$ die Menge der holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$.
Sei $D_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ der Kreisring um $z_0 \in \mathbb{C}$ für reelle $0 \leq r < R$.

42. Aufgabe: Die Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(D_{0,\pi}(0))$ für $j = 1, 2, 3, 4$ haben jeweils eine Singularität in $z = 0$. Bestimmen Sie den Typ der Singularität (mit Beweis):

(a) $f_1(z) = \sin(z)/z$,

(b) $f_2(z) = 1/\sin(z)$,

(c) $f_3(z) = \cos(z)/z$,

(d) $f_4(z) = \sin(1/z)$.

43. Aufgabe: Sei $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\varphi(t) = (1 + |t|) \exp(2\pi i t)$. Berechnen Sie die Umlaufzahl $N(\varphi, z)$ in den Punkten $z = -1$ und $z = 3/2$.

44. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze holomorphe Funktion und $n \geq 0$ eine natürliche Zahl, sodass für jedes $w \in \mathbb{C}$ die Urbildmenge $f^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = w\}$ höchstens n Elemente enthält. Zeigen Sie: f ist eine Polynomfunktion von Grad $\deg(f) \leq n$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $f(1/z)$ keine wesentliche Singularität in $z = 0$ besitzt.

45. Aufgabe: Sei die Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = 2 \exp(4\pi i t)$. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\gamma \frac{\exp(\frac{\pi}{2} \cdot z)}{z^2 - 2iz + 3} \, \mathrm{d}z \; .$$

Hinweis: Verwenden Sie den Residuensatz.