Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 6

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 5. Juni

Bearbeiten Sie bitte nur zwei der vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.

23. Aufgabe: Sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein reelles Polynom in einer Variablen.

(a) Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, dann auch $\overline{z}$.

(b) Ist P irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$, dann ist P linear oder quadratisch.

Hinweis: Verwenden Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

24. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie zwei der drei Aussagen:

(a) Ist f nicht konstant, dann hat f dichtes Bild in $\mathbb{C}$.

(b) Wenn $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$, dann ist f konstant.

(c)* Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine weitere holomorphe Funktion mit höchstens einer Nullstelle. Wenn $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann gilt $f = c \cdot g$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Verwenden Sie jeweils den Satz von Liouville.

25. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Taylorreihe von f in den Punkten $x_0 = 0$ und $x_1 = 4\sqrt{3}$.
Hinweis: Setzen Sie f fort zu einer holomorphen Funktion auf einem geeigneten Definitionsbereich. Verwenden Sie dann die Abschätzung des Konvergenzradius.

26. Aufgabe: Seien D und E offene nichtleere Teilmengen von $\mathbb{C}$ und $b : D \to D'$ eine Bijektion, sodass b und b^{-1} holomorph sind. Sei E sternförmig. Zeigen Sie: Jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion.

Bonusaufgabe (keine Wertung): Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Sei $\gamma : [0,1] \to D$ ein stetiger Weg und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wie kann man ein Wegintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ sinnvoll definieren? Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 19.