Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 5

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 29. Mai

Jede Aufgabe ist vier Punkte wert. Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

19. Aufgabe: Seien α, β stetige, stückweise differenzierbare Abbildungen $[0,1] \to D$. Diese sind *homotop mit festen Randpunkten*, wenn es ein stetiges $H : [0,1]^2 \to D$ gibt mit $H(0,t) = \alpha(t)$ und $H(1,t) = \beta(t)$ sowie $H(s,0) = \alpha(0) = \beta(0)$ und $H(s,1) = \alpha(1) = \beta(1)$ für alle $0 \leq s,t \leq 1$. Zeigen Sie, dass dann für jede in D holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_\alpha f(z)\mathrm{d}z = \int_\beta f(z)\mathrm{d}z \ .$$

20. Aufgabe: Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\zeta \in D$ fest. Zeigen Sie: Die Funktion

$$g : D \to \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} & z \neq \zeta \ , \\ f'(\zeta) & z = \zeta \ , \end{cases}$$

ist holomorph. Hinweis: Riemannscher Hebbarkeitssatz.

21. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \sqrt{2}$. Zeigen Sie $f(0) \in \mathbb{R}$. Hinweis: Cauchy-Integralformel.

22. Aufgabe: Sei $P(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe mit komplexen a_n, die in einer offenen Kreisscheibe $U \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $P(z)$ in U holomorph ist mit holomorpher Ableitung

$$P'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n z^{n-1} \ .$$

Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz. Hier vereinbaren wir formal $0^0 = 1$.