Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer
Dr. Mirko Rösner

Blatt 3
Abgabe auf Moodle bis zum 15. Mai

Bearbeiten Sie bitte nur vier der fünf Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.

10. Aufgabe: (a) Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $(w_n)_n$ konvergiert gegen w genau dann wenn $(\overline{w_n})_n$ gegen $\overline{w}$ konvergiert.

(b) Folgern Sie $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$ und $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.

11. Aufgabe: Zeigen Sie, dass die folgenden Potenzreihen konvergieren:

(a) $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$,

(b) $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

12. Aufgabe: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$. Folgern Sie:

(a) $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ und $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$,

(b) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ für komplexe z und w.

Hinweis: Sie können benutzen, dass $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(z) = -\sin(-z)$.

13. Aufgabe: Zeigen Sie:

(a) $a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$ für alle komplexen Zahlen a, b_1, b_2 mit $a \neq 0$,

(b) Es gibt komplexe Zahlen a_1, a_2, b mit $a_1, a_2 \neq 0$ sodass $a_1^b a_2^b \neq (a_1 a_2)^b$.

14. Aufgabe: Wir identifizieren $\mathbb{C}$ als Vektorraum mit $\mathbb{R}^2$ durch $z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$. Die komplexe Exponentialfunktion definiert dann eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ .$$

Berechnen Sie ihre Jacobi-Matrix in einem festen Punkt $z_0 \in \mathbb{R}^2$.