Übungen zu Funktionentheorie 1 — Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer — Blatt 2

Dr. Mirko Rösner — Abgabe auf Moodle bis zum 8. Mai

Jede Aufgabe ist vier Punkte wert. Wir schreiben $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit einem Symbol ∞.

6. Aufgabe: Den *projektiven Raum* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ kann man definieren als Menge der eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^2$, also

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C} \cdot v \mid 0 \neq v \in \mathbb{C}^2\} \ .$$

Die Gruppe $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ durch $M(\mathbb{C} \cdot v) := \mathbb{C} \cdot Mv$ für $M \in G$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine eindeutige Bijektion $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sodass $\varphi(z) = \mathbb{C} \cdot \left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es gilt $M\varphi(z) = \varphi(M\langle z \rangle)$ für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ und alle $M \in G$.

7. Aufgabe: Eine Matrix $H \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ heißt *hermitesch* falls $\overline{H} = H'$.

(a) Zeigen Sie, dass jede hermitesche Matrix H eine reelle Determinante hat.

(b) Jede hermitesche Matrix H mit $\det(H) < 0$ definiert einen *verallgemeinerten Kreis*

$$\{\mathbb{C} \cdot v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid \overline{v}' H v = 0\} \ .$$

Zeigen Sie, dass zwei hermitesche Matrizen H_1 und H_2 mit negativer Determinante genau dann denselben Kreis definieren, wenn $H_1 = \mu H_2$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$.

8. Aufgabe: Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis und seien $z_0, w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ feste Punkte mit $z_0, w_0 \notin S^1$. Zeigen Sie: Es gibt $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ mit $M\left\langle S^1 \right\rangle = S^1$ und $M\langle w_0 \rangle = z_0$.
Hinweis: Lösen Sie die entsprechende Aufgabe für den Kreis $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ anstelle von S^1. Benutzen Sie dann die Cayley-Transformation.

9. Aufgabe: Seien $z_n \to z$ und $w_n \to w$ konvergente Folgen komplexer Zahlen. Zeigen Sie: Die Folge $z_n w_n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen zw.
Hinweis: Zerlegen Sie in Real- und Imaginärteil und verwenden Sie die entsprechende Aussage aus der reellen Analysis.