

Bearbeiten Sie bitte nur vier der fünf Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.

**1. Aufgabe:** Sei  $\mathbb{C}'$  die bekannte abelsche Gruppe  $(\mathbb{R}^2, +, 0)$  mit der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ y_1 x_2 + x_1 y_2 \end{pmatrix} .$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{C}'$  ein Körper ist. Sie können ohne Beweis annehmen, dass  $(\mathbb{R}^2, +, 0)$  eine abelsche Gruppe ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{C}'$  als Körper isomorph ist zu  $\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ .

**2. Aufgabe:** Zeigen Sie explizit

- (a)  $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ ,
- (b)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$  und  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ .

**3. Aufgabe:** Bestimmen Sie alle Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichung  $z^3 + 8 = 0$ .  
Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

**4. Aufgabe:** Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}(2, \mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ . Zeigen Sie  $cz + d \neq 0$  und

$$\operatorname{Im}(M \langle z \rangle) = \frac{\det(M)}{|cz + d|^2} \cdot \operatorname{Im}(z) .$$

**5. Aufgabe:** Käpt'n Rotbart und seine Piratencrew waren gefürchtet auf allen Sieben Weltmeeren. Als er merkte, dass er alt wurde, vergrub Käpt'n Rotbart seinen Schatz allein auf einer einsamen Insel. Seine Crew wusste zwar die Insel, doch niemand außer ihm kannte den genauen Ort. Nach seinem Tod hinterließ er eine Schatzkarte, auf der neben einer groben Skizze der Insel geschrieben stand:

*Auf der Insel ist ein Wasserfall  $W$  und ein alter Baum  $B$  sowie eine Feuerstelle  $F$ . Gehe von der Feuerstelle zum Wasserfall und dann noch einmal die gleiche Strecke  $90^\circ$  nach links. Markiere diese Stelle  $A$ . Gehe dann von der Feuerstelle zum Baum und dann nochmal die gleiche Strecke um  $90^\circ$  nach rechts. Markiere diese Stelle  $B$ . Der Schatz ist genau in der Mitte zwischen  $A$  und  $B$  vergraben.*

Als die Schatzsucher auf der Insel ankamen, sahen sie den Wasserfall und den alten Baum, aber die Feuerstelle war nicht mehr aufzufinden. Nach kurzem Nachdenken fanden sie dennoch den Schatz. Wie haben sie das gemacht?

**Achtung:** Diese Schatzkarte stimmt nicht mit der im Skript überein!