Prof. R. Weissauer
Dr. M. Rösner

Seminar Wintersemester 2020

Modulformen und L-Reihen

Zeit und Ort: Dienstag 14.15 - 15.45 Uhr, online (Link per Mail).

Vorkenntnisse: Funktionentheorie 1.

Zielgruppe: Hörerinnen der Vorlesung Funktionentheorie 2, aber nicht darauf beschränkt.

Website: `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/Seminar_WiSe20/`

Kontakt: Dr. M. Rösner, Zimmer 3.332, INF 205, `mroesner@mathi.uni-heidelberg.de`

Inhalt. Das Seminar ergänzt und vertieft verschiedene Themen der Vorlesung "Funktionentheorie 2". Wir beginnen mit einer kurzen Wiederholung topologischer Grundlagen und diskutieren dann die Riemann'sche Zeta-Funktion als erstes Beispiel einer L-Funktion. Wir behandeln Grundlagen zu komplexen Mannigfaltigkeiten, analytische Gebilde und die Picard'sche Sätze. Ein Spezialfall Riemannscher Flächen sind elliptische Kurven, diese werden in der Vorlesung als komplexe Tori definiert. Wir diskutieren, warum das äquivalent ist zur algebraischen Definition (glatte projektive Kurve über $\mathbb{C}$ vom Geschlecht eins). Elliptische Modulformen behandeln wir in der Vorlesung vorrangig zur vollen Modulgruppe $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$. Wir diskutieren Eisensteinreihen zu Kongruenzgruppen und den Hecke-Summationstrick. Der Hecke'sche Umkehrsatz liefert eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Modulformen und L-Reihen, für Neuformen liefert das eine gute Theorie von L-Funktionen mit Eulerprodukt. Ein besonders berühmtes Resultat der Funktionentheoretie ist der Primzahlsatz. Wir behandeln den Beweis von de la Vallée Poussin und Hadamard. Zum Abschluss werfen wir einen Blick auf die Funktionentheorie mit mehreren Variablen und nichtholomorphen Modulformen (Maaßformen).

Vorträge.

(1) **Riemannsche Zetafunktion.** (Josua Kugler) 3. November
Konvergenzgebiet, Euler-Produkt, analytische Fortsetzung, Funktionalgleichung (Beweis z.B. mit Thetareihen, Thetatransformationsformel zitieren), Riemannsche Vermutung formulieren. Literatur: [1, §VII,4-5], [8, §VII.1].

(2) **Anwendungen des Residuensatzes.** (Max-Emanuel Hlawatsch) 10. November
Integralformeln, Werte der Riemannschen Zetafunktion an geraden natürlichen Zahlen. Literatur: [1, §III.7], [9, S. 113-119].

(3) **Fundamentalgruppe.** (Nico Haaf) 17. November
Homotopie auf reeller Mannigfaltigkeit M, Gruppenstruktur von $\pi_1(M, x_0)$ sauber beweisen. Verträglichkeit mit komplexer Struktur, Funktorialität. [11], [6, §1.1], [5, §III.4].

(4) ***Überlagerungen.** (Patrick Patalong) 24. November
Quotientenmannigfaltigkeiten nach diskontinuierlicher Gruppenoperation, Überlagerungstheorie, universelle Überlagerung. [6, §1.3], [5, §III.5].

(5) **Riemannsche Flächen I.** (Anna Roth) 1. Dezember
Grundlagen zu komplexen Mannigfaltigkeiten. Analytisches Gebilde. Fortsetzung des komplexen Logarithmus. Literatur: [5, §I.1-3].

(6) **Elliptische Kurven.** (Dominik Seel) 8. Dezember
Kurven im projektiven Raum $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, Additionstheorem der Weierstraßschen $\wp$-Funktion, komplexen Tori, j-Funktion. Literatur: [1, §], [7, §I.5].

(7) **Thetareihen** (Arianit Miftari) 15. Dezember
Quadratische Formen, zugehörige Theta-Reihen, Thetagruppe, Thetatransformationsformel, Ring von Thetafunktionen, Bezug zu Modulformen. [1, §VI.4], [7, §V]

(8) **Eisensteinreihen zu Kongruenzgruppen** (Dustin Baron) 12. Januar
Kongruenzgruppen Γ, Fundamentalgebiete, Äquivalenzklassen von Spitzen, Eisensteinreihen zu Γ und Gewicht $k \geq 3$ und zu Gewicht 1 und 2 durch Hecke-Summation. Eisensteinreihen erzeugen Modulformen modulo Spitzenformen. Jede Werteverteilung in den Spitzen ist möglich. Literatur: [1, §VI.5], [4, §4.2 und§4.6], [10, §VII].

(9) **Riemannsche Flächen II.** (Victor Stein) 19. Januar
Kleiner und großer Satz von Picard. Beweis via λ-Modulfunktion. Literatur: [5, §III.3] [3, §15.22–31], [2, §VII.7–8]. Zur λ-Funktion siehe auch `https://dlmf.nist.gov/23.15`.

(10) **Vier und Acht-Quadrate-Satz.** (Merve Çakir) 26. Januar
Eisensteinreihen zu Gewicht 4 und 2 und Thetareihen mit Fourierentwicklung. [1, §VII.1], [2, §X.1]

(11) ***L*-Funktionen zu elliptischen Modulformen** (Benjamin Brindle) 2. Februar
Definition, Funktionalgleichung, Eulerprodukt, Heckes Umkehrsatz. Literatur: [1, §.VII.3]

(12) **Primzahlsatz I.** (Maurice Schneider) 9. Februar
Satz von de la Vallée Poussin und Hadamard, Geschichtliche Hintergründe und Beweisskizze. $\zeta(s) \neq 0$ bei $\Re(s) = 1$ und den Taubersatz können Sie annehmen, sollten diese Aussagen aber klar formulieren. Literatur: [1, §VII.4 und Seite 452ff]

(13) **Primzahlsatz II.** (Lennart Stöpler) 16. Februar
Beweisen Sie die benötigten Aussagen über die Riemannsche Zeta-Funktion (Analytische Fortsetzung und $\zeta(s) \neq 0$ bei $\Re(s) = 1$.) Literatur [1, §VII.5]

(14) ***Primzahlsatz III.** (Prisca Gestrich) 23. Februar
Beweisen Sie den Taubersatz. Literatur [1, §VII.6]

Die Vorträge mit * sind etwas anspruchsvoller.

Grundsätzliches. Die einzelnen Vorträge werden per E-Mail vergeben. Sie kümmern sich bitte selbstständig um eine Vorbesprechung mindestens zwei Wochen vor dem Vortrag. Die Vorträge dauern jeweils eine Sitzung. Danach sollte Zeit für eine kurze Diskussion bleiben (etwa fünf Minuten). Die Zielgruppe sind die anderen Teilnehmer. Für diese sollte Ihr Vortrag verständlich, aber nicht zu langweilig sein. Bitte tragen Sie sich in Müsli ein: `https://muesli.mathi.uni-heidelberg.de/overview`
Die folgenden Referenzen sind teilweise online verfügbar über die Universitätsbibliothek.
`https://katalog.ub.uni-heidelberg.de`

Literatur

[1] R. Busam, E. Freitag, *Funktionentheorie.* Lehrbuch Springer, (1993).
[2] K. Chandrasekharan, *Elliptic Functions* Grundlehren Springer (1985).
[3] E. Copson, *An introduction to the theory of functions of a complex variable*, Oxford (1978).
[4] F. Diamond und J. Shurman, *A first course in modular forms*, Springer (2005).
[5] E. Freitag, *Funktionentheorie 2.* Lehrbuch Springer, (2009).
[6] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge Univ. Press (2002). `http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`
[7] M. Köcher und A. Krieg, *Elliptische Modulformen.* Lehrbuch Springer (2007).
[8] E. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie* Springer (1992).
[9] D. Salamon, *Funktionentheorie* Birkhäuser, (2012).
[10] B. Schoeneberg, *Elliptic Modular Functions* Grundlehren Band 203, Springer, (1974).
[11] R. Weissauer *Fundamentalgruppe*, (Skript). `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weissaue/vorlesungsskripte/Fundamentalgruppe.pdf`