Prof. R. Weissauer
Dr. M. Rösner

Seminar Sommersemester 2019

Kombinatorik und Darstellungstheorie

Es sind noch Vorträge zu vergeben!

Zeit und Ort: mittwochs 14.15 - 15.45 Uhr, Seminarraum 3 im Mathematikon.

Vorkenntnisse: Lineare Algebra, insbesondere das Tensorprodukt.

Zielgruppe: B.Sc.-Studierende Mathematik

Website: `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/Seminar_SoSe19/`

Kontakt: Dr. M. Rösner, Zimmer 3.332, INF 205, `mroesner@mathi.uni-heidelberg.de`

Inhalt

Die endlichdimensionale Darstellungstheorie der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n)$ wird beschrieben durch die der symmetrischen Gruppe S_n. Dieses Dualitätsresultat von Hermann Weyl aus den 1920er Jahren markiert als Hauptsatz der Invariantentheorie sowohl den Schlusspunkt der klassischen Invariantentheorie des neunzehnten Jahrhunderts als auch den Beginn der modernen Darstellungstheorie.
In diesem Seminar studieren wir das Resultat von Hermann Weyl in moderner Sprache. Dazu entwickeln wir zunächst die dazu benötigten Elemente der Darstellungstheorie wie der Kombinatorik. Zuletzt diskutieren wir einige Anwendungen für die symmetrische Gruppe.

Literatur

[1] D. Bump *Lie Groups* Graduate Texts in Mathematics, vol 225. Springer, (2004).

[2] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A first Course.* Graduate Texts in Mathematics, vol 129. Springer (2004).

[3] B. Sagan: *The Symmetric Group – Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions,* Springer (Second edition, 2001)

[4] J.P. Serre: *Linear representations of finite groups.* Graduate Texts in Mathematics, vol 42. Springer, (1977).

[5] B. L. van der Waerden: *Algebra I.* Springer, (1967).

[6] R. Weissauer: *Tensorrechnung und Riemannsche Geometrie.* Homepage `www.mathi.uni-heidelberg.de/~weissaue/vorlesungsskripte/RiemannscheTensore.pdf`

[7] H. Weyl: *The Classical Groups – Their invariants and representations,* Princeton University Press (Edition 1966)

Vorträge

(1) **Grundlagen Darstellungstheorie.** Morphismen, Lemma von Schur, Charaktere... Literatur: [4, §1], [3, §1.1-§1.6], [2, §2].

(2) **Symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$.** Klassifikation irreduzibler Darstellungen: Specht-Moduln, Hakenformel. Literatur: [2, §4], [3, §2.1- §2.3, §3.10], [5, §14.7], [6, §3.8].

(3) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ **als Liegruppe.** Liealgebra, Exponentialabbildung, Funktorialität. Evtl. universelle Einhüllende und Casimir. Literatur: [2, §7, §8], siehe auch [6, §2.2, §2.4, §2.5].

(4) **Algebraische Darstellungen von** $\mathrm{GL}(n)$**.** Standard-Torus D, dominante Gewichte, Höchstgewichte, Klassifikationssatz [6, Thm. 1]. Literatur: [6, §2.3, §2.6], [1, §35].

(5) * **Höhengraduierung.** Filtrierung einer algebraischen Darstellung $W = U \cdot w$ ausgehend von einem Höchstgewichtsvektor w. Zerlegung von Tensorprodukten algebraischer Darstellungen. Literatur: [6, §2.8, §2.9]

(6) **Beispiele.** Tensoralgebra, symmetrische und alternierende Tensoren, Multipolynome. Literatur: [6, §3.2–6], [2, §B]

(7) * **Dimensionswechsel**, Ordnungsrelation der Gewichte. Literatur: [6, §3.10]

(8) **Schur-Weyl-Dualität**. Zerlegung des Tensorproduktes $V^{\otimes k}$ als $\mathrm{GL}(V) \times \mathcal{S}_k$-Bimodul, Schur-Weyl-Korrespondenz.
Literatur: [6, Lemma 25, Satz 4], [1, §36-§38, Theorem 38.4], [2, Thm. 6.3, §15.3, §15.5].

(9) **Erzeugende Funktionen.** Für viele kombinatorische Größen gibt es keine geschlossene Formel, sie lassen sich aber durch formale Potenzreihen elegant beschreiben. Beispiel: Partitionsfunktion. Literatur: [3, §4.1]

(10) * **Symmetrische Funktionen**, Schurfunktionen. Literatur: [3, §4.3,4.4]

(11) * **Littlewood-Richardson-Regel.** Produkte symmetrischer Funktionen sind symmetrisch. Die Multiplikation in der Algebra der symmetrischen Funktionen wird beschrieben durch die L.-R.-Koeffizienten. Literatur: [3, §4.9]

(12) * **Murnaghan-Nakayama-Regel.** In (2) wurde jeder Partition λ von r eine irreduzible Darstellung der Gruppe $\mathcal{S}_r$ zugeordnet. Die Regel von M.-N. liefert einen effizienten Algorithmus zur Berechnung des Charakters χ^λ dieser Darstellung. Literatur: [3, §4.10]

Grundsätzliches

- Die Vorträge werden in der Vorbesprechung vergeben. Die Anmeldung in Müsli dient der Erreichbarkeit der Teilnehmer und der Verwaltung.
- Die Vorträge dauern jeweils eine Sitzung (knapp 90 Minuten).
- Sie halten den Vortrag für die anderen Teilnehmer. Verständlichkeit für diese ist Maxime Ihres Vortrags. Die Vorträge bauen größtenteils aufeinander auf.
- Kümmern Sie sich selbstständig um eine Vorbesprechung mindestens zwei Wochen vor dem Vortrag.
- Es besteht Anwesenheitspflicht.