Punktweise Limiten (fü) messbarer Funktionen

Mirko Rösner

Wir zeigen: Eine punktweise fast überall konvergente Folge messbarer Funktionen hat eine messbare Grenzfunktion.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere messbare Teilmenge. Wir betrachten das vom Standardintegral auf $C_c(X)$ erzeugte Lebesgue-Integral I. Punktweise Konvergenz (fü) einer Funktionfolge $(f_i)_i$ bedeutet Konvergenz von $f_i(x)$ für alle festen $x \in X \backslash N$ außerhalb einer Nullmenge $N \subseteq X$.

Definition 1. *Eine reellwertige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt* messbar, *wenn es eine Folge stetiger Funktionen $f_i \in C_c(X)$ mit kompaktem Träger gibt, die punktweise (fü) gegen f konvergiert. Die Menge aller messbaren $f : X \to \mathbb{R}$ wird mit $M(X)$ bezeichnet.*

Bemerkung: $M(X)$ ist ein Verband (da $C_c(X)$ ein Verband ist).

Lemma 2. *Sei $h \in L(X)$ Lebesgue-integrierbar und $C > 0$ eine reelle Konstante. Dann ist die charakteristische Funktion von $M = \{x \in X\,;\, h(x) \geq C\}$ Lebesgue-integrierbar, d.h. M ist endlich messbar. Weiterhin:* $\mathrm{vol}(M) \leq C^{-1} \cdot I(|h|)$.

Beweis. OBdA ist $C = 1$, sonst betrachte $C^{-1}h$ statt h. OBdA sei $0 \leq h \leq 1$, sonst betrachte $\max(0, \min(1, h))$.[1] Nun sind $h^n(x) := (h(x))^n$ messbar ($M(X)$ ist Algebra) für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und nach Satz 6.19.6 in [Wei14] (wegen $|h^n| \leq h$) wiederum Lebesgue-integrierbar. Mit $h^n \searrow \chi_M \geq 0$ folgt aus Beppo-Levi: χ_M ist Lebesgue-integrierbar. Insbesondere ist $\mathrm{vol}(M) := I(\chi_M)$ wohldefiniert. Die Abschätzung folgt aus $C \cdot \chi_M \leq |h|$ und der Monotonie des Integrals. □

Proposition 3 (Satz 6.19.5 in [Wei14])**.** *Sei $f_i \in M(X)$ eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise (fü) gegen ein $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f messbar.*

Beweis. OBdA seien $f_i \geq 0$, sonst betrachte $f_i = f_i^+ - f_i^-$ mit $f_i^\pm \geq 0$. OBdA konvergiert $f_i(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$, sonst ersetzen wir $f_j(x)$ und $f(x)$ für x in einer Nullmenge durch 0. Insbesondere gilt $f \geq 0$. Für $j \in \mathbb{N}_{>0}$ und

$$h_j(x) = \max(j - \|x\|, 0) \in C_c(X) \subseteq L(X)$$

[1] Die konstante 1-Funktion ist messbar in $X \subseteq \mathbb{R}$, also ist $\min(1, h)$ messbar wegen Verbandseigenschaften. Da $\min(h, 1) \leq h$, ist $\min(h, 1)$ Lebesgue-integrierbar nach Satz 6.19.6 in [Wei14]. Also $\max(0, \min(1, h)) \in L(X)$ nach Verbandseigenschaften.

gilt $\min(f_i, h_j) \in L(X)$ nach Verbandseigenschaften und Satz 6.19.6 in [Wei14]. Aus $f_i \to f$ (punktweise) folgt $\min(f_i, h_j) \to \min(f, h_j)$ (punktweise) für $i \to \infty$. Da $\min(f_i, h_j)$ von h_j majorisiert wird, folgt aus dem Satz von Lebesgue: $\tilde{f}_j := \min(f, h_j) \in L(X)$. Wegen der Konstruktion des Lebesgue-Integrals gibt es $g_j \in C_c(X)$ mit $I(|g_j - \tilde{f}_j|) \leq 2^{-j}/j$. Nach Lemma 2 ist

$$N_j := \{x \in X\,;\, |g_j(x) - \tilde{f}_j(x)| \geq 1/j\}$$

endlich messbar mit $\operatorname{vol} N_j \leq 2^{-j}$. Nach dem ϵ-Kriterium für Nullmengen ist

$$N := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=m}^{\infty} N_j$$

eine Nullmenge. Sei nun $x \in X \backslash N$ ein fester Punkt. Dann gibt es $j_x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) \leq h_j(x)$ und $x \notin N_j$ für alle $j \geq j_x$. Damit gilt aber $|g_j(x) - f(x)| = |g_j(x) - \tilde{f}_j(x)| < 1/j$ für $j \geq j_x$, also $g_j(x) \to f(x)$ für $j \to \infty$. Wir haben also gezeigt: g_j konvergiert gegen f punktweise in $X \backslash N$ und f ist somit messbar. $\square$

Literatur

[Wei14] R. Weissauer, *Grundlagen der Analysis*, Vorlesungsskript, 14. November 2014.