Prof. Dr. R. Weissauer
Mirko Rösner

Wintersemester 2014
Abgabe bis 12.12.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

---

1. Aufgabe: (1+2=3 Punkte) Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie für alle $v, w \in H$:

(a) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$,

(b) Für $x, y \in H$ gilt $\langle x, y\rangle = 0$ genau dann, wenn $\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

2. Aufgabe: (3 Punkte) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $n \geq 1$, die Formel

$$2\sum_{i=1}^{n} \tfrac{x_i}{r} \cdot \partial_i(r^{2-n}) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\tfrac{x_i}{r}) \cdot r^{2-n} = (3-n)r^{1-n}.$$

Hier bezeichnet wie in der Physik üblich $r = \|x\|$ die euklidische Norm von x.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Für ein festes $\xi \in \mathbb{R}$ ist der Translationsoperator

$$T_\xi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (T_\xi f)(x) = f(x+\xi).$$

Zeigen Sie: T_ξ ist ein isometrischer Isomorphismus. [Das bedeutet T_ξ ist linear, bijektiv und es gilt $\langle T_\xi f, T_\xi g\rangle = \langle f, g\rangle$ für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.]

4. Aufgabe: (3+4=7 Punkte) Man kann eine Hilbertraumbasis von $L^2([0,1])$ wie folgt konstruieren: Mit

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiere $f_{n,m}(x) = 2^{n/2} \cdot \psi(2^n x - m)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq m < 2^n$. Zeigen Sie:

(a) Die $f_{n,m}$ bilden zusammen mit der konstanten 1-Funktion ein Orthonormalsystem.

(b) $W := \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \bigoplus\limits_{n,m} \mathbb{C} \cdot f_{n,m}$ liegt dicht in $L^2([0,1])$ bezüglich der L^2-Norm.

Hinweis zu b): Zeigen Sie nacheinander: (i) $W' = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \bigoplus_{n,m} \mathbb{R} \cdot f_{n,m}$ ist ein Verband und punktetrennend, (ii) für jedes $g \in C_c([0,1], \mathbb{C})$ sind jeweils Real- und Imaginärteil von g wegen Satz 8.12 Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von $g_k \in W'$ und (iii) verwenden Sie: $C_c([0,1], \mathbb{C})$ liegt dicht in $L^2([0,1])$ wegen Lemma 8.6.