Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 7**

Prof. Dr. R. Weissauer
Mirko Rösner

Wintersemester 2014

Abgabe bis 05.12.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

Auf $f \in C_c(\mathbb{N}_0)$ ist ein abstraktes Integral über die endliche Summe $I(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} f(n)$ definiert. Für das zugehörige Lebesgue-Integral von $f \in L(\mathbb{N}_0)$ schreiben wir symbolisch

$$I(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

Statt "f ist Lebesgue-integrierbar" sagen wir auch "$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ ist absolut konvergent".

1. Aufgabe: (3 Punkte) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Hinweis: Blatt 2 Aufgabe 2 vom letzten Semester und Satz von Beppo-Levi.

2. Aufgabe: (3 Punkte) Zeigen Sie: Jede Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist messbar. Folgern Sie mit Satz 6.19.6: Falls $|f(n)| \leq F(n)$ für ein $F \in L(\mathbb{N}_0)$, dann gilt $f \in L(\mathbb{N}_0)$.

3. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_n| \leq C \cdot r^{-n}$ für feste reelle $C, r > 0$. Wir vereinbaren $0^0 = 1$. Zeigen Sie:

(a) $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist absolut konvergent für festes $x \in (-r, r) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Sei $0 < r' < r$ fest. Dann gibt es ein $F \in L(\mathbb{N}_0)$ mit $|a_n \cdot n \cdot x^{n-1}| \leq F(n)$ für alle $x \in [-r', r']$.

Hinweis: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine reelles $C' > 0$ mit $n \leq C' \cdot (1+\epsilon)^n$ nach Aufgabe 3b von Blatt 3 aus dem letzten Semester (warum?).

(c) Die Funktion $g(x)$ ist differenzierbar in $x \in (-r, r)$ mit der Ableitung

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}.$$

Hinweis: Für jedes $x \in (-r, r)$ gibt es ein r' mit $|x| < r' < r$. Verwenden Sie Satz 4.32 für $f : [-r', r'] \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $(x, n) \mapsto a_n \cdot x^n$.