Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 6**

Prof. Dr. R. Weissauer Wintersemester 2014
Mirko Rösner Abgabe bis 28.11.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n,\ n \geq 1$ offen und nichtleer. Wir betrachten das Lebesgue-Integral zum Standardintegral auf $B = C_c(M)$.

1. Aufgabe: (1+2=3 Punkte) Zeigen Sie für alle reellen $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen:

(a) $2 \cdot |ab| \leq a^2 + b^2$,

(b) $|a+b|^2 \leq 4 \cdot \max(a^2, b^2)$.

2. Aufgabe: (3 Punkte) Zeigen Sie: Die Distributionen $\mathcal{F}(M)$ bilden einen Untervektorraum von $\mathcal{F}_{\text{gen}}(M)$.

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist eigentlich,

(b) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht eigentlich.

4. Aufgabe: (3 Punkte) Zeigen Sie: $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(|x|)$ liegt in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

5. Aufgabe: (2+3=5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\|x\|)$. Zeigen Sie:

(a) $(\Delta f)(x) = 0$ für $x \neq 0$.

(b) Die lokale Ordnung in $\xi = 0$ des zugehörigen Funktionals ist $d_0(F_{f\mathrm{d}x}) \geq 2$.

Hinweis: Hier ist $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Zeigen Sie $d_0(F_{f\mathrm{d}x}) \geq 2 - \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$.