Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 5**

Prof. Dr. R. Weissauer Wintersemester 2014
Mirko Rösner Abgabe bis 21.11.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

---

1. Aufgabe: (1+2+2=5 Punkte) Für $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ ist die Faltung

$$g * f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \qquad (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie:

(a) $g * f = f * g$,

(b) $g * f$ hat kompakten Träger,

(c) $f * (g * h) = (f * g) * h$ für $f, g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$.

Bemerkung: Die Differenzierbarkeit von $g * f$ folgt aus Aufgabe 4 von Blatt 3. Mit (b) ist $g * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$, also ist der Ausdruck in (c) wohldefiniert.

2. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$K : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto t^{-k/2} \exp(-\pi \tfrac{\|x\|^2}{t}).$$

(a) Zeigen Sie $\int_{\mathbb{R}^k} K(t, x) \mathrm{d}x = 1$ für alle $t > 0$.

(b) Zeigen Sie $4\pi \cdot \partial_t K(t, x) = \Delta_x K(t, x)$ für den Laplace-Operator bezüglich x.

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $f = \chi_{[0,\infty)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion der nichtnegativen reellen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, d.h. f ist lokal L^1-integrierbar, definiert also ein Funktional

$$F = F_{f\mathrm{d}x} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitung $\partial_x F$.

4. Aufgabe: (5 Punkte) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ und die Dirac-Distribution $\delta_0 : \varphi \mapsto \varphi(0)$ gibt es eine reelle Konstante $a_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\Delta F_{f\mathrm{d}x} = a_0 \cdot \delta_0.$$

Berechnen Sie $a_0 \in \mathbb{R}$, ohne das Volumen der Einheitsspäre $S^0 \subseteq \mathbb{R}$ zu verwenden.
Hinweis: Passen Sie den Beweis von Lemma 7.7 an. Die Existenz von a_0 brauchen Sie nicht zu zeigen.