Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 3**

Prof. Dr. R. Weissauer — Wintersemester 2014

Mirko Rösner — Abgabe bis 07.11.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

Wir betrachten das Lebesgue-Integral zum Standardintegral auf $B = C_c(X)$ für $X \subseteq \mathbb{R}^k$ mit $k \geq 1$.

1. Aufgabe: (3 Punkte) Zeigen Sie die Standardabschätzung $I(|f|) \geq |I(f)|$ für jede Lebesgue-integrierbare Funktion $f \in L(X)$.
Hinweis: Betrachten Sie $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ und $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $f \in L(X)$ mit $\int_X |f(x)| \mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie:

(a) $A_n = \{x \in X \,|\, |f(x)| > 1/n\}$ ist Nullmenge in X für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

(b) $A = \{x \in X \,|\, f(x) \neq 0\}$ ist Nullmenge in X.

4. Aufgabe: (5 Punkte) Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ and $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ nichtentartete folgenkompakte Quader. Sei $f(x, y) : X \times Y \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar nach x [das bedeutet $(\partial_x)^n f$ existiert und ist stetig auf $X \times Y$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$]. Zeigen Sie:

$$F : X \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_Y f(x, y) \mathrm{d}y$$

ist beliebig oft stetig partiell differenzierbar nach x und es gilt

$$(\partial_x)^n F(x) = \int_Y (\partial_x)^n f(x, y) \mathrm{d}y.$$

Hinweis: Insbesondere ist f stetig und hat kompakten Träger. Verwenden Sie vollständige Induktion über n.