Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 2**

Prof. Dr. R. Weissauer Wintersemester 2014
Mirko Rösner Abgabe bis 31.10.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

Wir betrachten immer das Lebesgue-Integral zum Standardintegral auf $B(\mathbb{R}) = C_c(\mathbb{R})$.

1. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_i) = 1$ für endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, und $f(x) = 0$ für alle anderen $x \in \mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann ist $f \in L(\mathbb{R})$ mit $I(f) = 0$.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $g(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dann ist g Lebesgue-integrierbar mit $I(g) = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Beppo-Levi und beginnen Sie mit $n = 1$. Sie dürfen verwenden, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie: Für reelles $\alpha < -1$ ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 1, \\ x^\alpha & x \geq 1 \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar. Berechnen Sie das Lebesgue-Integral $I(f)$.

3. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie: Der Grenzwert $\lim\limits_{m \to \infty} \int_1^m f(t)\mathrm{d}t$ existiert in $\mathbb{R}$ für $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & t < 1, \\ (-1)^n/n & n \leq t < n+1 \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{>0}, \end{cases}$$

aber f ist nicht Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}$. Hinweis: Wäre f Lebesgue-integrierbar, dann auch $|f|$.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $f \in C([a,b])$ stetig auf einem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ für $a < b$. Wenn $\int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0$ für alle Testfunktionen $\varphi \in C^1([a,b])$ gilt, dann ist f konstant.
Zusatzaufgabe: (1 Bonuspunkt) Die Aussage gilt bereits, wenn man nur solche $\varphi \in C^1([a,b])$ betrachtet, bei denen $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ist.

5. Aufgabe: (3 Punkte) Für eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definieren wir eine Treppenfunktion $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\bar{f}(x) = f(\lfloor x \rfloor)$. Hier ist $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$ die Gaußklammer. Zeigen Sie für $f \in C_c(\mathbb{Z})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n).$$