Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 12**

Prof. Dr. R. Weissauer Wintersemester 2014/15

Mirko Rösner Abgabe bis 23.01.15 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

---

1. Aufgabe: (3 Punkte) Berechnen Sie das Polynom $Z_l(x, \xi)$ für $l = 1$ und $n = 3$. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 auf Blatt 11.

2. Aufgabe: (3 Punkte) Die Polynome $P_{l,k}(x_1, x_2, x_3)$ bilden für $k = -l, \ldots, l$ eine Basis von $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^3)$. Hinweis: Verwenden Sie die Dimensionsformel für $\mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$.

3. Aufgabe: (3 Punkte) Berechnen Sie die Kelvin-Transformation der harmonischen Polynome $P_{l,0} \in \mathcal{H}_l(\mathbb{R}^n)$ für $l = 0, 1, 2$.

4. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Für Polynome $f(x_1, \ldots, x_m)$ in $m > 1$ Variablen verwendet man oft Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Man schreibt dann $x^\alpha := \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i}$ und $|\alpha| := \sum_{i=1}^m \alpha_i$. Die Fakultät eines Multiindex ist $\alpha! = \prod_{i=1}^m \alpha_i!$. Zeigen Sie:

(a) Durch $< f, g >:= f(\partial) g(x)|_{x=0}$ für $f, g \in \mathcal{P}_l(\mathbb{R}^n)$ wird ein Skalarprodukt homogener Polynome erklärt. Hierbei wird in f formal die Variable x_i durch ∂_i ersetzt.

(b) Für $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ und $g = \sum_\alpha b_\alpha x^\alpha$ gilt $< f, g >= \sum_\alpha a_\alpha b_\alpha \cdot \alpha!$,

(c) für den Drehoperator $L_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i$ mit $i \neq j$ gilt $\langle f, L_{ij} g \rangle = \langle L_{ji} f, g \rangle$.

5. Aufgabe: (5 Bonuspunkte) Für reelle $0 < \rho < R$ sei $V \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, die die abgeschlossene Kugelschale $X[\rho, R] = \{x \in \mathbb{R}^2, | \, \rho \leq \|x\| \leq R\}$ enthält. Zeigen Sie: Für harmonisches $f : V \to \mathbb{R}$ gibt es $\alpha(f), \beta(f) \in \mathbb{R}$, unabhängig von $r \in [\rho, R]$, sodass

$$\frac{1}{r^2} \int_{S^2(r)} f(x) \sigma_2(x) = \alpha + \beta \log(r).$$

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis von Lemma 10.5.