5. Aufgabe: (4 Bonuspunkte) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, $n \geqslant 1$ im Schwartzraum eine Lösung der Wellengleichung

$$\Box f = 0.$$

Zeigen Sie: Dann ist $f = 0$.

Lösung:
Angenommen $f \in \mathcal{S}$ löst die Wellengleichung. Dann folgt

$$0 = \mathcal{F}(\Box f)(y) = \mathcal{F}(\partial_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2) f) = (2\pi i)^2 (y_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2) \mathcal{F} f(y).$$

Für alle $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $y_{n+1}^2 \neq \sum_{i=1}^n y_i^2$ gilt also $\mathcal{F}f(y) = 0$. Da $\mathcal{F}f$ stetig ist, gilt $\mathcal{F}f = 0$ auch auf dem Lichtkegel, also $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = 0$.

6. Aufgabe: (2+2+3+2=9 Bonuspunkte) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ mit

$$\Delta F_{u\,\mathrm{d}x} = 0.$$

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $F_{u\,\mathrm{d}x}$ glatt ist. Sei dazu $\xi \in M$ ein fester Punkt und sei $N = B_r(\xi)$, $r > 0$, eine offene Kugel um ξ mit $B_{2r}(\xi) \subseteq M$. Dann gibt es ein $f \in C_c^\infty(M)$ mit $f|_N \equiv 1$ und Träger in $B_{2r}(\xi)$ (Satz über die Partitionen der Eins). Die Fundamentallösung der Poisson-Gleichung sei $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Für $(x, y) \in N \times M$ mit $x \neq y$ setzen wir

$$w(x, y) = \Delta_y \left((1 - f(y))E(x - y)\right).$$

Zeigen Sie:

(a) Für $y \in N$ ist $w(x, y) = 0$, also gibt es eine glatte Fortsetzung $w \in C^\infty(N \times M)$.

(b) $v_N(x) = \int_M u(y)w(x, y)\mathrm{d}y$ definiert eine glatte Funktion $v_N \in C^\infty(N)$.

(c) Es gilt $\int_M v_N(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_M u(x)g(x)\mathrm{d}x$ für alle $g \in C_c^\infty(N)$.

(d) Es gibt ein $v \in C^\infty(M)$ mit $F_{v\,\mathrm{d}x} = F_{u\,\mathrm{d}x}$.

Hinweise: (b) Vertauschungssatz 4.32 (c) Satz von Fubini (d) Verheften der lokal eindeutig definierten Funktionen v_N.

Lösung:

(a) Für alle $y \in N$ gilt $f(y) = 1$, daher $(1 - f(y))E(x - y) = 0$ für $(x, y) \in N \times N$ mit $x \neq y$, insbesondere $w(x, y) = 0$. Da $N \times N$ offen in $N \times M$ ist, lässt sich w auf die Diagonale $x = y$ durch Null glatt fortsetzen. Insbesondere ist $w \in C^\infty(N \times M)$.

(b) Für festes $x \in N$ ist $w(x,\cdot) \in C_c^\infty(N)$, daher ist $v_N(x)$ wohldefiniert (der Träger von $w(x,\cdot)$ liegt in $B_{2r}(\xi)$). Es bleibt zu zeigen, dass v_N glatt ist. Für festes $\eta \in N$ gibt es ein reelles $s > 0$ mit $B_{2s}(\eta) \subseteq N$. Dann ist

$$c_\alpha := \sup_{B_s(\eta)\times M} |\partial_x^\alpha w(x,y)| < \infty$$

für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$, da die stetige Funktion $\partial_x^\alpha w(x,y)$ auf dem Kompaktum $\overline{B_s(\eta)} \times \overline{B_{2r}(\xi)}$ beschränkt ist. Also sind die Voraussetzungen von Satz 4.32 erfüllt und v_N ist in $B_s(\eta)$ glatt. Aber $\eta \in N$ war beliebig, also ist v_N glatt in N.

(c) Sei $g \in C_c^\infty(N)$ beliebig. Wir verwenden Fubini und Satz 4.32.

$$\begin{aligned}
&\int_N v_N(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_N \int_M u(y)w(x,y)g(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_M \int_N u(y)\Delta_y\left((1-f(y))E(x-y)\right)g(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_M u(y)\underbrace{\Delta_y \int_N E(x-y)g(x)\,\mathrm{d}x}_{=g(y)}\,\mathrm{d}y - \int_M u(y)\Delta_y \underbrace{f(y)\int_N E(x-y)g(x)\mathrm{d}x}_{\in C_c^\infty(M)}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_M u(y)g(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\Delta F_{u\,\mathrm{d}x} = 0$, also verschwindet der rechte Term.

(d) Nach Aufgabe 1 auf Blatt 1 ist v_N als stetige Funktion auf N eindeutig bestimmt. Für die verschiedenen $\xi \in M$ bilden die $N = N(\xi)$ eine Überdeckung von M. Für $N, N' \subseteq M$ mit nichtleerem Schnitt gilt $v_N|_{N\cap N'} = v_{N'}|_{N\cap N'}$ (betrachte Testfunktionen ϕ mit Träger in $N \cap N'$). Es gibt also eine glatte Funktion $v : M \to \mathbb{R}$ mit $v|_N = v_N$ für alle offenen $N \subseteq M$ (setze $v(x) := v_N(x)$ für ein N mit $x \in N$).[1]

[1] Für die Experten: Die C^∞-Funktionen auf den offenen Teilmengen N von M bilden eine Garbe.