Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 1**

Prof. Dr. R. Weissauer — Wintersemester 2014

Mirko Rösner — Abgabe bis 24.10.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

---

1. Aufgabe: (3 Punkte) Sei $f \in C(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion. Wenn $\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0$ für alle Testfunktionen $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt, dann ist bereits $f \equiv 0$.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $C_c(X)$ die Axiome eines Verbandes erfüllt.

3. Aufgabe: (2+1+2=5 Punkte) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 3.20 im Skript[1] durch einen expliziten Beweis der folgenden Aussagen:

(a) Die Definition $I^+(g) := \sup I(g_n)$ für $g_n \nearrow g$ hängt nicht von der konkreten Wahl der Folge $(g_n)_n$ ab.

(b) Es gilt $I^+(g) = I(g)$ für $g \in B(X)$.

(c) $I^+ : B^+ \to \mathbb{R}^+$ ist semilinear.

4. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$:

(a) $f \in C_c(\mathbb{Z})$ genau dann, wenn $f(n) = 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{Z}$. [Sie sollen hier insbesondere zeigen, dass f immer stetig ist.]

(b) $I(f) := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ ist ein abstraktes Integral auf $C_c(\mathbb{Z})$.

5. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Auf dem Verband $B = C_c(\mathbb{Z})$ sei das abstrakte Integral I gegeben wie in Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a) Die monotone Hülle B^+ ist die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit $f(n) \geq 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Die Fortsetzung I^+ ist für $f \in B^+$ gegeben durch $I^+(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \in \mathbb{R}^+$.

---

[1] Lemma 3.21 in der gebundenen Version vom 15. April 2014.