Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II **Blatt 7**

Prof. Dr. R. Weissauer Sommersemester 2014

Mirko Rösner Abgabe bis 30.05.14 um 11:15 in INF 288.

---

1. Aufgabe: (1+1+1=3 Punkte) Für einen metrischen Raum (M, d) und eine Teilmenge $N \subseteq M$ sei die charakteristische Funktion $\chi_N : M \to \mathbb{R}$

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in N, \\ 0 & \text{für } x \in M \backslash N. \end{cases}$$

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass $\chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist.

(b) Zeigen Sie für $A, B \subseteq M$, dass $\chi_A + \chi_B = \chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B}$.

(c) Zeigen Sie für $A, B \subseteq M$, dass $\chi_A\chi_B = \chi_{A\cap B}$.

2. Aufgabe: (3 Punkte) Seien $g_1, g_2 \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ Treppenfunktionen. Zeigen Sie, dass auch $g_1 + g_2$ eine Treppenfunktion ist.
Bemerkung: Analog zeigt man, dass g_1g_2 eine Treppenfunktion ist.

3. Aufgabe: (2 Punkte) Ein Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Gestalt $Q = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ für $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. (Falls $a_k > b_k$ für ein k, so ist $[a_k, b_k] = \emptyset$ die leere Menge.) Zeigen Sie, dass für beliebige Quader $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ auch $Q_1 \cap Q_2$ ein Quader ist.

4. Aufgabe: (3+3=6 Punkte) Für $\xi \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R}\backslash\{\xi\} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

(a) Zeigen Sie für eine Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq \xi$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, dass $(f(x_n))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$ unabhängig ist von der konkreten Wahl der Folge $(x_n)_n$.

Man kann also f eindeutig zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

5. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ zulässig, sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in Q$ und sei $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Wir schreiben formal

$$f(x) = o(\|x - a\|^\alpha) \qquad (\text{für } x \to a),$$

falls für jede in Q konvergente Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{\|x_n - a\|^\alpha} = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Falls $f(x) = o(\|x - a\|^\alpha)$ (für $x \to a$) für ein $\alpha \in \mathbb{N}_0$, dann auch $f(x) = o(\|x - a\|^\beta)$ (für $x \to a$) für jedes $\beta \in \mathbb{N}_0$ mit $\beta < \alpha$.

(b) Falls $f_1(x) = o(\|x - a\|^\alpha)$ und $f_2(x) = o(\|x - a\|^\beta)$ (für $x \to a$), dann $(f_1f_2)(x) = o(\|x - a\|^{\alpha+\beta})$ (für $x \to a$).
